

midas NFX를 활용한

실무 유한요소해석의 이해와 활용

고체역학의 기본개념

(주)마이다스아이티

고체역학의 기본개념

1. 고체와 고체역학

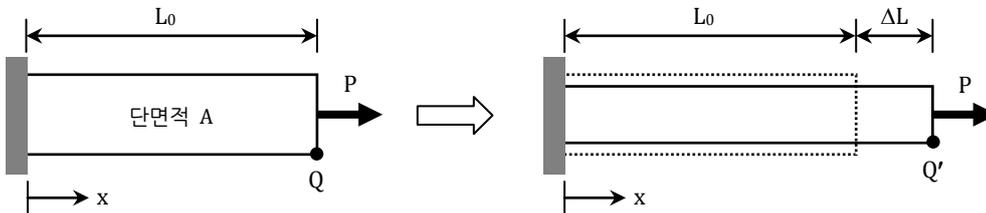
물질에는 기체, 액체, 고체, 세 가지 상태가 있으며, 각 상태는 다음과 같은 기본적인 특징을 가지고 있습니다.

- ✓ 기체, 액체
용기에 담겨 있지 않고서는 스스로 위치와 모양을 유지할 수 없습니다.
- ✓ 고체
용기에 담겨 있지 않아도 스스로 위치와 모양을 유지합니다.

이처럼 고체의 가장 큰 특징은 스스로 자신의 위치와 모양을 유지할 수 있는 것이며, 고체역학은 외부의 작용에 의한 고체의 위치와 모양의 변화, 그리고 이에 따른 모양의 유지가능 여부를 연구하는 분야입니다.

- ✓ 고체역학
외부의 작용에 대한 고체의 운동, 변형과 안정성을 연구하는 분야

고체역학에서 고체의 운동, 변형과 안정성을 표현할 때에는 변위, 변형률, 응력을 사용합니다.



<그림 1> 외부하중의 작용에 대한 고체의 변형

- 변위 (displacement, u)
위치의 변화량으로, <그림 1>에서 점 Q가 외부하중 P의 작용에 의해 Q'로 이동하면 이 점의 변위는 $u = \overrightarrow{QQ'}$ 의 벡터로 정의됩니다. 변위의 단위는 [길이]입니다.
- 변형률 (strain, ϵ)
변형률은 고체의 변형(deformation)을 측정하는 기준으로, <그림 1>에서 길이의 변화량 ΔL 을 원래 길이 L_0 로 나눈 값 $\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$ 로 정의합니다. 변형률은 단위가 없는 무차원의 수입니다.
- 응력 (stress, σ)
고체역학에서의 응력은 외부작용에 대해 고체가 모양을 유지하는데 요구되는 힘, 내부저항력으로 고체의 강도적인 안전성을 평가하는 기준이 됩니다. 어떠한 외부작용(하중)에 대해 고체가 자신의 모양을 유지하는데 필요한 힘인 응력(σ)과 고체가 쓸 수 있는 최대 힘인 극한응력(ultimate stress, σ_u)을 서로 비교하여 이 고체의 안전성을 판단할 수 있습니다. 즉, 외부작용에 대해 고체가 모양을 유

지하는데 필요한 힘인 응력이 고체가 쓸 수 있는 최대 힘인 극한응력보다 크게 되면 고체는 더 이상 모양을 유지하지 못하고 파괴됩니다.

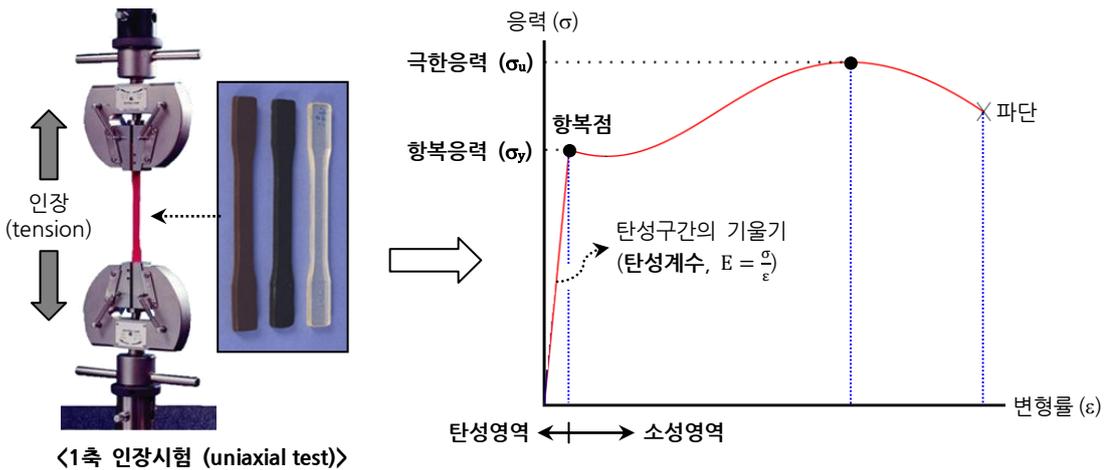
이 두 응력의 비율을 안전율(factor of safety, $F.S. = \frac{\sigma_u}{\sigma}$)이라고 하며, 반드시 1보다 커야 합니다. 일반적인 설계에서는 2~2.5의 안전율을 사용합니다.

<그림 1>의 단면적이 A인 봉에 축방향의 하중 P가 작용하였을 때, 이 고체의 응력은 $\sigma = \frac{P}{A}$ 로 정의됩니다.

응력은 단위면적당 작용하는 힘이며, 압력과 동일하게 [힘/면적]의 단위를 사용합니다. 압력과 응력의 차이는 이 두 힘이 각각 외력(external force)과 내력(internal force)이라는 점입니다. 즉, 압력은 고체에 변형을 유발하는 외부작용력이지만, 응력은 이러한 외부작용에 대해 고체가 자신의 모양을 유지하기 위해 스스로 발휘해야 하는 내부저항력입니다.

2. 응력-변형을 관계

재료의 역학적 거동을 정의하는 가장 중요한 특성인 응력-변형을 관계는 재료의 인장시험을 통해 얻어집니다.



<1축 인장시험 (uniaxial test)>

<그림 2> 재료 인장시험과 응력-변형을 곡선의 예

<그림 2>의 응력-변형을 곡선으로부터 다음과 같이 재료의 중요한 역학적 거동 특성과 관련 개념들을 정리할 수 있습니다.¹

- **탄성영역, 항복점, 소성영역**
스프링의 양끝을 잡고 미소한 힘으로 잡아 당겼다 놓으면 스프링이 원래의 모양으로 되돌아 가지만, 일정 크기 이상의 힘으로 세게 잡아 당겼다가 놓으면 스프링이 원래의 모양으로 되돌아 가지 못하고 영구변형이 발생하는 것을 쉽게 확인할 수 있습니다.

¹ 응력과 변형률은 각각 작용하중(P)과 변형량(ΔL)에 비례하므로, 작용하중과 변형량의 관계도 응력-변형을 곡선과 유사한 모양을 보입니다.

이처럼 작용하중을 제거하였을 때, 재료가 초기의 모양(상태)으로 되돌아 가는 영역을 재료의 **탄성 영역(elastic zone)**이라고 합니다. 반대로 작용하중을 제거하여도 재료가 초기의 모양(상태)으로 되돌아가지 못하는 영역을 **소성영역(plastic zone)**이라 하며, **영구변형(소성변형)**이 발생하였다 또는 재료에 **항복(yielding)**이 발생하였다고 합니다.

이 탄성영역과 소성영역의 경계가 **항복점**이고, 이때의 응력이 **항복응력(yield stress, σ_y)**입니다. 외부하중의 작용에 대해 고체의 파괴 가능성을 판단할 때에는 응력과 재료의 극한응력(σ_u)을 비교하지만, 일반적인 설계에서는 항복(영구변형)이 발생하는 것을 방지하여야 하므로 보통 응력과 재료의 항복응력(σ_y)을 비교하여 안전성을 판단하는 경우가 많습니다.

• **탄성계수와 응력-변형률의 관계**

<그림 2>에 보이는 것처럼 탄성영역에서는 응력과 변형률이 **선형(직선, linear)의 비례관계**를 보입니다. 이 탄성영역에서 응력-변형률 직선의 기울기가 **탄성계수(elastic modulus, E)**이고, 탄성영역에서 응력과 변형률은 $\sigma = E\epsilon$ 의 관계를 갖습니다.

✓ **후크의 법칙 (Hooke's law)**

탄성영역에서 변형량(변형률)은 하중(응력)의 크기에 비례한다.

✓ **탄성계수 (E)**

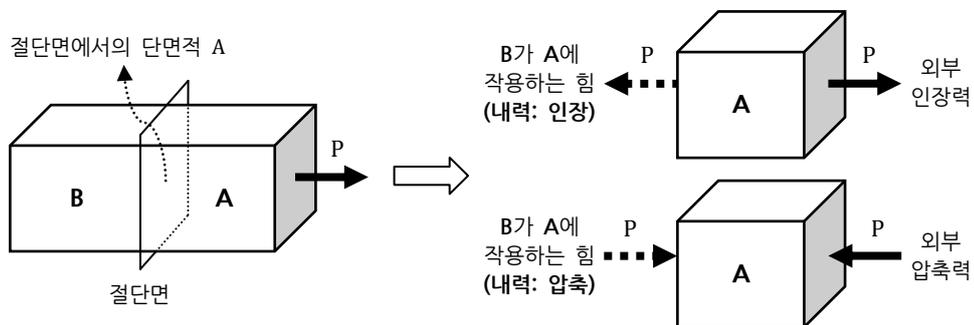
탄성영역에서 직선의 기울기, 응력과 변형률의 비례상수

이러한 관계를 이용하여 탄성영역에서는 변위를 구하면 변형량, 변형률을 계산할 수 있고, 변형률과 탄성계수의 곱으로 응력을 계산할 수 있습니다.

참고로, 재료의 탄성영역에서는 **선형해석**이 가능하지만, 재료가 소성영역으로 넘어가게 되면 응력과 변형률이 더 이상 선형 비례관계가 아니므로 재료의 비선형 거동을 고려할 수 있는 **재료비선형 해석**을 수행하여야 합니다.

3. 응력

응력은 외부작용에 의해 고체에 변형이 발생하였을 때 고체 내부에서 발생하는 내부저항력입니다.



<그림 3> 고체 내부에서 발생하는 내력(internal force)으로서 응력

<그림 3>의 왼쪽에서 외부하중 P를 받는 고체를 임의의 절단면으로 잘라서 A와 B, 두 개의 부분으로 나누고

우리가 관심을 갖는 부분을 **A**라고 하면, 절단면 기준으로 나머지 부분인 **B**가 고체의 모양을 유지하기 위해 **A**에 작용하는 힘이 **A**에 작용하는 **내력(응력)**입니다.

이러한 개념에 따라 외력의 작용에 의해 고체 내부에 발생하는 내력과 응력은 다음과 같이 정리할 수 있습니다. (<그림 3>의 오른쪽 참고)

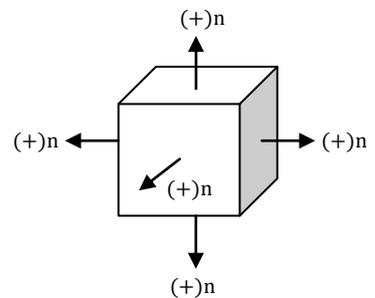
- ✓ 외부 인장력 P 에 의해 **A**가 끌려가면 **B**는 모양을 유지하기 위해 **A**를 잡아당기게 됩니다. 즉, **A**에는 외부 인장력 P 와 크기는 같고 방향이 반대인 인장내력이 작용하고, **인장응력(tensile stress)** $\sigma = (+)\frac{P}{A}$ 이 발생합니다.
- ✓ 반대로 외부 압축력 P 가 **A**에 작용하여 **A**가 안쪽으로 밀려 들어오면 **B**는 모양을 유지하기 위해 **A**를 밀어내게 됩니다. 즉, **A**에는 외부 압축력 P 와 크기는 같고 방향이 반대인 압축내력이 작용하고, 이에 따라 **압축응력(compressive stress)** $\sigma = (-)\frac{P}{A}$ 이 발생합니다.

• **인장응력과 압축응력**

인장(tension)과 **압축(compression)**은 힘, 응력의 작용방향과 작용면의 (+)법선방향을 기준으로 구분합니다.

즉, (+)법선방향과 동일한 방향으로의 작용을 인장, 반대 방향으로의 작용을 압축이라 하고, 각각 (+)와 (-)의 부호를 사용합니다. 이러한 정의에 따라 작용면의 (+)법선방향을 기준으로 인장력과 압축력, 인장응력과 압축응력을 정의할 수 있습니다.

참고로, 각 면의 (+)법선방향은 <그림 4>와 같이 물체의 내부에서 밖으로 나가는 방향으로 정의합니다.

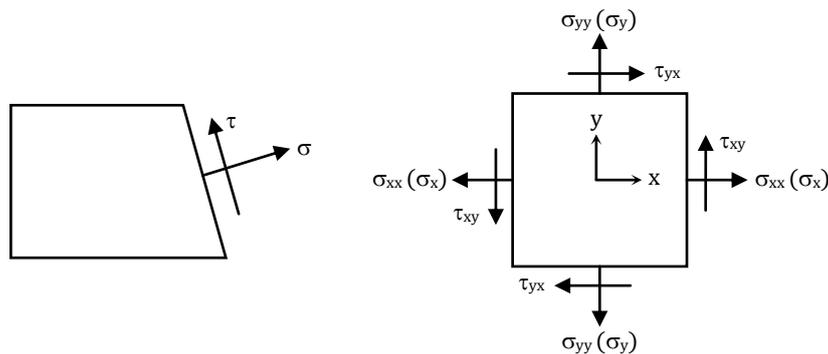


<그림 4> 각 면의 (+)법선방향

• **수직응력, 전단응력과 응력의 표기**

<그림 5>의 왼쪽과 같이 임의 방향으로 놓인 작용면에 작용하는 응력은 작용면에 수직인 방향과 평행인 방향에 대해 성분분해를 할 수 있습니다.

작용면에 수직인 방향으로 작용하는 응력을 **수직응력(normal stress, direct stress, σ)**이라 하고, 작용면에 평행한 방향으로 작용하는 응력을 **전단응력(shear stress, τ)**이라고 합니다.



<그림 5> 수직/전단응력과 2차원 평면응력 상태의 응력성분

응력을 표기할 때에는 수직응력과 전단응력을 의미하는 σ , τ 와 함께 2개의 아래첨자를 함께 사용합니다. 첫번째와 두번째 아래첨자는 각각 **작용면의 (법선)방향**과 **응력의 작용방향**을 가리킵니다.

즉, σ_{xx} 는 법선방향이 (+)x축 방향인 면에서 (+)x축 방향으로 작용하는 수직응력을 나타내고, τ_{xy} 는 법선방향이 (+)x축 방향인 면에서 (+)y축 방향으로 작용하는 전단응력을 의미합니다. 여기에서 작용면의 법선방향이 반대로 향하게 되면((-)x축 방향의 작용면), 응력도 반대 방향((-)x축 방향)으로 작용하는 응력이 (+)응력, 즉, 인장응력이 됩니다. <그림 5>의 오른쪽은 2차원 평면응력 상태에서 (+)인 응력성분을 보여주고 있습니다.

일반적으로 첫번째 아래첨자와 두번째 아래첨자가 같은 경우에는 두 개의 첨자를 하나로 줄여서 표기합니다. 즉, σ_{xx} 는 간단하게 σ_x 로 표기합니다.

그리고, 전단응력은 대칭이므로 ($\tau_{xy}=\tau_{yx}$), 첫번째, 두번째 아래첨자의 순서를 정확하게 구분하지 않고 표기합니다. (즉, τ_{yx} 를 그냥 τ_{xy} 로 표기하는 경우가 많습니다)

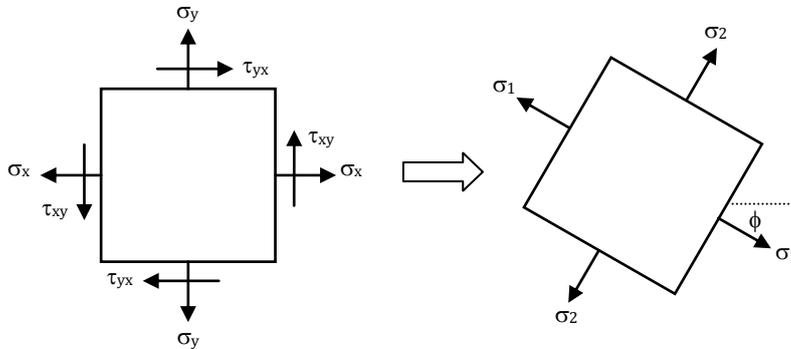
- **주응력과 주방향**

하중을 받는 물체에서 전단응력 성분이 모두 0이 되는 특정 요소면 방향이 존재합니다. 이 요소면에 수직인 방향을 **주방향(principal direction)**이라 하고, 이 요소면에 작용하는 수직응력을 **주응력(principal stress)**이라고 합니다. **3축응력(tri-axial stress)** 상태에서는 세 개의 주방향과 주응력이 존재하는데, 주응력 크기 순서에 따라 각각 **최대 주응력 σ_1** , **중간 주응력 σ_2** , **최소 주응력 σ_3** 이라고 합니다. 주응력의 방향은 물체의 모양 뿐만 아니라 작용하중에 따라서도 달라집니다.

- ✓ **2축응력(biaxial stress) 상태 또는 평면응력(plane stress) 상태¹**
세 개의 주응력 중 하나가 0일 때의 응력상태 ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$)

- ✓ **1축응력(uniaxial stress) 상태**
세 개의 주응력 중 두 개가 0일 때의 응력상태 ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

<그림 6>의 오른쪽에서 각도 ϕ 는 단면의 수직방향과 주방향 사이의 각도를 나타냅니다.



<그림 6> 평면응력 상태와 주응력, 주방향

<그림 6>의 왼쪽과 같은 평면응력 상태에서 최대, 최소 주응력은 다음의 2차방정식의 해로부터 계산할 수 있습니다.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

¹ 2축응력 상태의 주방향을 **주축(principal axis)**, 3축응력 상태의 주방향을 **주면(principal plane)**이라고 합니다.

주응력, 주방향과 함께 또 다른 중요한 관심 사항은 **최대 전단응력(maximum shear stress)**이 발생하는 방향이며, 이 방향에서는 수직응력이 0이 아닙니다. 이 최대 전단응력의 발생 방향은 주방향과 항상 45°만큼 차이가 나며, 이 방향에서의 최대 전단응력과 수직응력은 다음과 같이 계산됩니다. (평면응력 상태 기준)

$$\tau_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

가장 일반적인 3축응력 상태에서 세 개의 주응력을 계산하기 위해서는 다음 3차 방정식의 해를 구해야 합니다.¹

$$\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

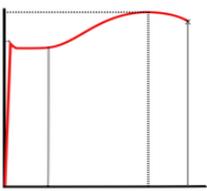
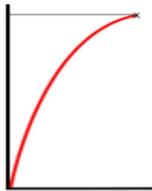
$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

3축응력 상태에서, 최대 전단응력은 최대 주응력과 최소 주응력으로부터 $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ 과 같이 계산할 수 있습니다.

4. 재료의 분류

재료는 역학적(기계적) 특성에 따라 **연성재료(ductile)**와 **취성재료(brittle)**로 구분됩니다.

연성재료 (ductile)	취성재료 (brittle)
구부리면 굽혀지는 재료 (→ 호박엿)	구부리면 부서지는 재료 (→ 가락엿)
파단에 앞서 상당한 양의 항복(소성변형)이 발생	파단에 앞서 아주 짧게 항복(소성변형)이 발생
  <p><응력-변형률 곡선> <연성재료의 파단></p>	  <p><응력-변형률 곡선> <취성재료의 파단></p>
연강(mild steel), 알루미늄, 알루미늄 합금, 구리, 마그네슘, 납, 테프론(teflon) 등 → 일반 구조용 강재	주철(cast iron), 콘크리트, 돌, 유리, 세라믹 금속(ceramic metal), 금속합금(metallic alloy) 등

<표 1> 역학적 특성에 따른 재료의 분류

¹ 참고로 I_1, I_2, I_3 를 **응력불변량(stress invariant)**이라고 합니다. 물체 내부의 한 지점에서 응력값들은 방향에 따라 변하지만, 이 세 개의 불변량들은 방향에 무관하게 항상 일정합니다.

재료가 연성인가, 취성인가에 따라 파괴이론의 적용과 안전을 계산방법이 달라집니다.

참고로, 취성재료는 탄성영역과 소성영역을 명확하게 구분하는 것이 어렵기 때문에 항복점과 항복응력을 정확하게 규정하기가 어렵습니다. 그러므로, 취성재료에서는 **0.2% 오프셋(0.2% offset)**을 적용하여 변형률이 0.2% ($\epsilon=0.0002$)가 될 때 소성변형이 발생한다고 가정하고, 이때의 응력을 항복응력으로 간주하여 사용합니다.

5. 파괴이론과 안전성의 판단

일반적으로 구조설계의 관심은 항복의 발생 여부이며, 이는 구조물에 발생한 응력과 인장시험으로 얻어진 재료의 항복응력을 비교하여 판단할 수 있습니다.

하지만, 재료 특성을 얻기 위한 인장시험은 1축방향의 시험이므로 이를 통해 얻어진 항복응력, 극한응력 등은 1축응력 상태 기준이고, 실제 구조물의 응력상태는 다축응력(multi-axial stress) 상태이므로, 조건/기준이 다른 이 두 개의 응력을 직접 비교하여 판단할 수 없습니다. 반드시 실제 구조물의 다축응력을 1축응력 상태와 동등한 조건으로 환산하고, 이 환산된 등가의 1축응력을 1축 단순인장시험으로 얻어진 항복응력과 비교하여 판단하여야 합니다.¹

다축응력 상태에 대한 항복/파괴여부를 판단할 때에는 재료의 특성에 따라 적절한 **파괴이론(failure theory, yield criterion)**과 이 파괴이론에서 제시하는 **등가응력(equivalent stress)** 계산방법을 적용합니다.²

다음은 실무에서 많이 사용하는 주요 파괴이론입니다.

- **최대 비틀림에너지 이론 (maximum distortion energy theory)**

조합응력 상태의 비틀림 에너지가 단순인장시험의 뒤틀림 에너지와 같아지면 항복이 발생하는 것으로 판단합니다. 변형률 에너지 가설에 기초하여 다음과 같은 **von Mises 응력** 계산식을 제시하였고, 이 von Mises 응력이 재료의 **항복응력**에 도달할 때 항복에 의한 파괴가 발생하는 것으로 판단합니다. 일반적으로 **von Mises 이론**이라고 부릅니다.

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}, \quad \sigma_{vm} \leq \sigma_{yield}$$

연성재료에서 실험결과와 가장 잘 일치합니다.

- **최대 전단응력 이론 (maximum shear stress theory)**

최대 전단응력이 단순인장시험에서의 최대 전단응력(**항복응력의 1/2**)과 같아지면 항복이 발생하는 것으로 판단합니다.

$$\tau_{max} \leq \frac{1}{2} \sigma_{yield}$$

일반적으로 **Tresca 이론**이라 부르며, 실험결과에 근접하면서 von Mises 이론에 비해 보수적인 결과를 제공하므로 취약부 설계에 많이 사용됩니다. 특히, 열처리한 연성재료는 이 이론에 따라 파괴되

¹ 이 개념은 간단하게 100원과 150달러를 비교할 때에 두 개의 기준(원, 달러)이 다르므로 직접 크기(100, 150)를 비교할 수 없고, 먼저 한쪽을 환산해서 기준을 맞추고 비교해야 하는 것과 비슷하게 생각할 수 있습니다.

² 파괴이론에 따라 환산된 응력을 **등가응력, 상당응력 또는 유효응력(effective stress)**이라고도 합니다.

는 경향이 있습니다.

이 이론은 항복파괴만 예측하므로 연성재료일 경우에만 유효하게 적용할 수 있습니다.

• 최대 주응력 이론 (maximum principal stress theory)

von Mises 이론과 Tresca 이론이 연성재료에 대한 연성파괴 이론인 것과 달리 이 최대 주응력 이론은 취성재료에 대한 취성파괴 이론입니다.

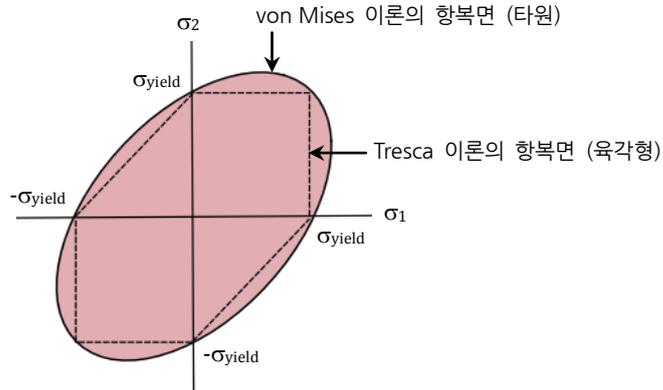
취성재료는 부서지기 전까지는 파괴되었다고 간주하기가 어렵습니다. 취성재료의 파괴현상은 최대 인장응력이 극한 인장강도에 도달할 때 발생하는 인장파괴나, 최대 압축응력이 극한 압축강도에 도달할 때 발생하는 전단파괴를 통해서 나타납니다.

이러한 파괴특징에 따라 취성재료에서는 최대 주응력이 극한응력(σ_u)을 초과하는 순간, 파괴가 발생하는 것으로 판단합니다.¹

$$|\sigma_1| \leq \sigma_u, \quad |\sigma_3| \leq \sigma_u$$

취성재료에 대해 실험결과와 가장 잘 일치합니다.

<그림 7>은 von Mises 이론과 Tresca 이론의 항복면을 비교하여 보여줍니다. 만약 응력상태가 각 항복면의 밖으로 나가게 되면 해당 이론은 재료에서 항복파괴가 발생한 것으로 간주합니다. 만약 응력상태가 두 항복면 사이 영역(타원과 육각형 사이)에 존재한다면, Tresca 이론은 항복파괴가 발생한 것으로 판단하지만, von Mises 이론은 그렇지 않습니다. 즉, Tresca 이론이 von Mises 이론에 비해 보수적인 결과를 제공합니다.



<그림 7> 평면응력 상태에서 von Mises 이론과 Tresca 이론의 비교

재료가 연성인가, 취성인가에 따라 적용하는 파괴이론이 다른 것과 유사하게 안전율을 계산할 때에도 두 재료에 대해 각기 다른 계산방법을 사용합니다.

✓ 연성재료

극한 인장응력과 von Mises 응력의 비율로 안전율을 계산합니다.

$$F.S. = \frac{\sigma_u}{\sigma_{vm}}$$

¹ σ_3 이 σ_1 보다 크기는 더 클 수 있으므로(부호가 (-)이지만 절대값이 큰 경우), σ_1 과 σ_3 을 모두 확인하여야 합니다.

✓ **취성재료**

취성재료에서는 극한 인장/압축응력과 최대/최소 주응력의 비율로부터 안전율을 계산합니다.

$$F.S. = \min \left[\left| \frac{\sigma_{\text{tension}}}{\sigma_1} \right|, \left| \frac{\sigma_{\text{compression}}}{\sigma_3} \right| \right]$$

참고로, 기계적인 파괴모드에는 여기에서 살펴본 연성파괴와 취성파괴 이외에도 다양한 종류가 존재합니다.

일반적으로 인장하중을 받는 구조물은 항복에 의해 파괴가 발생하지만, 압축하중을 받는 구조물은 안정성 또는 강성을 갑자기 손실하는 좌굴(buckling)에 의해 파괴가 발생할 수 있습니다. 그러므로, 축방향으로 압축하중을 받는 구조물에 대해서는 좌굴해석을 수행하여 구조물의 안정성을 검토하는 것이 좋습니다.