

모드 해석의 결과를 보는 방법

Modal Analysis Review

1. Abstract

모드 해석은 구조물의 동적 특성을 알기 위해 사용됩니다. 여기서 동적 특성은 고유진동수와 고유모드로 표현되는 진동 특성을 말합니다. 고유진동수는 탄성체를 해석할 때 강성과 질량을 함께 고려하는 경우에 찾을 수 있는 구조물의 고유한 특성 주파수입니다. 고유모드는 구조물이 동적으로 움직일 수 있는 정해진 형상이며 고유진동수와 하나씩 짝을 이룹니다.

고유진동수는 동적 해석을 할 때 주파수 범위를 정하는 기준과 시간 간격을 정하는 기준이 됩니다. 그래서 모드 기반의 동적 해석을 할 때는 관심 주파수 범위를 포함하는 모드 개수를 결정하기 위해서 먼저 모드 해석을 합니다.

2. 모드 해석

2-1. 모드 해석의 개요

$$\mathbf{K}\phi_i - \lambda_i \mathbf{M}\phi_i = \mathbf{0} \quad (\text{no summation})$$

모드 해석은 동적 해석의 기본이 되는 해석으로 구조물의 고유한 특성인 고유진동수와 고유모드를 구하는 해석입니다. 고유진동수와 고유모드는 대상 구조물의 재료, 형상, 경계 조건에 따라 정해진 값이며 따라서 구조물의 진동 방식은 이미 결정되어 있습니다. 모드 해석은 진동 저감 설계를 하거나 또는 그 설계 내용을 변경하기 위한 기본 정보를 얻는 방법입니다. 모드 해석의 결과에는 고유진동수와 고유모드 외에 모드유효질량과 모드유효질량참여율이 있습니다.

REAL EIGENVALUES								
MODE NUMBER	EIGENVALUE	RADIANS	CYCLES	PERIOD	GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS	ORTHOGONALITY LOSS	ERROR MEASURE
1	2.377389e+002	1.541878e+001	2.453976e+000	4.075019e-001	1.000000e+000	2.377389e+002	0.000000e+000	6.335324e-005
2	6.933851e+002	2.633221e+001	4.190901e+000	2.386122e-001	1.000000e+000	6.933851e+002	1.050098e-012	3.062352e-005
3	1.341472e+003	3.662611e+001	5.829227e+000	1.715493e-001	1.000000e+000	1.341472e+003	2.527504e-012	5.331061e-006
4	2.308430e+003	4.804613e+001	7.646778e+000	1.307740e-001	1.000000e+000	2.308430e+003	1.587371e-011	7.632976e-005
5	6.613297e+003	8.132218e+001	1.294283e+001	7.726286e-002	1.000000e+000	6.613297e+003	3.211128e-011	6.778080e-005
6	9.545076e+003	9.769890e+001	1.554926e+001	6.431174e-002	1.000000e+000	9.545076e+003	3.745305e-011	2.619663e-006
7	1.262011e+004	1.123392e+002	1.787935e+001	5.593044e-002	1.000000e+000	1.262011e+004	4.794911e-012	1.363933e-006
8	3.695298e+004	1.922316e+002	3.059461e+001	3.268550e-002	1.000000e+000	3.695298e+004	2.133141e-012	1.318128e-006
MODAL EFFECTIVE MASS								
MODE NUMBER	T1	T2	T3	R1	R2	R3		
1	1.655891e-010	4.721618e-001	5.829155e-009	5.310365e+004	1.436086e-003	2.294033e+004		
2	9.703211e-004	2.965186e-009	1.229197e+000	1.429809e-004	1.571198e+005	1.855518e-004		
3	2.772683e-002	1.560973e-010	6.175762e-002	5.527566e-004	3.010328e+006	1.395310e-004		
4	4.195989e-009	1.668191e-002	4.666414e-009	3.072083e+004	6.282984e-002	9.279699e+003		
5	4.195958e-003	1.260840e-009	1.826947e-003	2.844592e-003	2.443906e+001	1.054549e-003		
6	5.967934e-002	8.080505e-011	5.246091e-003	2.004567e-003	2.362787e+004	1.111113e-003		
7	3.405972e-001	2.237178e-010	1.926891e-004	3.354821e-003	4.912590e+004	4.597819e-003		
8	3.185414e-004	3.516184e-008	5.427688e-006	1.306226e-001	1.475947e+002	8.875453e-006		
PERCENTAGE MODAL EFFECTIVE MASS								
MODE NUMBER	T1	T2	T3	R1	R2	R3		
1	0.00%	36.37%	0.00%	34.66%	0.00%	0.72%		
2	0.07%	0.00%	94.68%	0.00%	4.81%	0.00%		
3	2.14%	0.00%	4.76%	0.00%	92.13%	0.00%		
4	0.00%	1.28%	0.00%	20.05%	0.00%	0.29%		
5	0.32%	0.00%	0.14%	0.00%	0.00%	0.00%		
6	4.60%	0.00%	0.40%	0.00%	0.72%	0.00%		
7	26.24%	0.00%	0.01%	0.00%	1.50%	0.00%		
8	0.02%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%		

[그림 1] 모드 해석의 결과

2-2. 고유진동수

고유진동수는 구조물이 스스로 진동할 수 있는 주파수입니다. 어떤 막대를 조금 휘었다 놓으면 굽힘 운동을 반복하는데 이것은 초기 변위에 따라 움직인 것이며 자유진동이라고 합니다. 그리고 이 움직임이 1 초에 5 번 반복하면 이 막대의 고유진동수는 5Hz 입니다. 구조물은 수많은 고유진동수를 가지며 실제로는 주로 낮은 차수의 고유진동수의 특성이 크게 나타납니다. 만약 이 막대의 두 번째 고유진동수가 12Hz 라면 5Hz 의 큰 움직임과 12Hz 의 작은 움직임이 혼합된 형태로 자유진동 운동을 합니다.

2-3. 모드 형상은 무엇을 뜻하는가

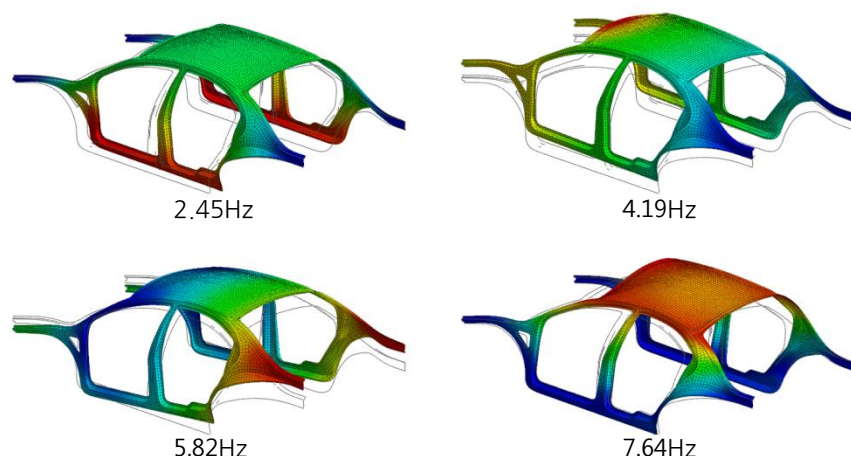
고유모드 또는 모드 형상은 고유진동수와 일대일로 짝을 이루는 구조물의 변형 형상입니다. 따라서 고유진동수 10 개를 구했다면 고유모드도 10 개를 구한 것입니다. 고유모드는 구조물이 외부에서 힘을 받아서 변형된 형상이 아니므로 변위가 아닙니다. 고유모드는 단지 절점들의 상대 변위의 비율을 나타낸 것이며 길이 단위로 표현되지 않습니다.

고유모드의 실질적인 의미는 다음과 같습니다. 구조물이 어떤 고유진동수로 진동을 하면 항상 고유진동수와 짝이 되는 고유모드와 같은 형상으로 변형합니다. 위에서 언급한 막대는 1 차 고유모드 형상으로 변형하는 5Hz 의 큰 진동 성분과 2 차 고유모드 형상으로 변형하는 12Hz 의 작은 진동 성분을 더한 형태로 움직입니다.

실제 구조물의 고유진동수의 개수는 이론적으로는 무한 개이지만 해석의 관점에서는 한정된 개수의 고유진동수를 사용합니다. 한정된 개수의 고유진동수를 사용한다는 것은 원래 구조물의 운동을 알기 위해서 구조물의 주파수 특성 중에서 일부만 사용하여 주파수 영역에서의 근사 해석 모델을 사용한다는 뜻입니다.

일반적으로 구조물에 높은 고유진동수의 변형 형상이 크게 나타나려면 아주 큰 에너지가 필요하고 또한 높은 주파수 대역에서는 큰 감쇠가 작용하므로 운동이 작게 나타나기 때문에 주파수 영역에서의 근사 해석 모델을 사용하는 것은 유용한 해석 방법입니다.

요약하면 구조물은 아무렇게나 움직이는 것이 아니라 내재된 주파수 성분에 따라 움직이는 모양이 이미 정해져 있고 임의의 움직임은 이 변형 형상들의 조합인 것입니다.



[그림 2] 모드 형상

3. 모드를 몇 개 사용할 것인가

3-1. 고유진동수 개수를 정하는 방법

구조물의 고유진동수는 구조물의 규모와 재질에 따라 값의 분포에 다양하게 나타납니다. 높은 건축물의 경우에는 수 십 Hz 내에 많은 고유진동수를 가지고, 손톱만한 금속판의 고유진동수는 가장 작은 값이 수 천 Hz 정도입니다. 그리고 자전거 벨이나 종 등의 일상 생활에서 소리를 발생하는 물건들은 대개 수 백에서 일 이천 Hz 사이에 짝을 이루어 고유진동수를 가지며 그 수는 2, 4 또는 6 개 정도입니다.

모드 해석을 할 때 고유진동수 개수를 지정하는 방법은 두 가지입니다.

- (a) 개수 지정
- (b) 주파수 범위 지정

위에서 언급한 자전거 벨이나 종과 같이 주요 고유진동수 개수를 미리 가늠할 수 있다면 개수를 지정하는 방법을 사용합니다. 그리고 작은 금속판과 같이 그 고유진동수의 크기를 가늠하기 어려운 경우에도 1 차적으로 개수를 지정하는 방법을 사용합니다. 그리고 건축물과 같이 좁은 주파수 범위에 크기가 작은 고유진동수가 많이 발생하는 경우에는 주파수 범위를 지정하는 방법을 사용합니다.

3-2. 질량참여율

$$\Gamma_{i\alpha} = \frac{1}{m_i} \phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{T}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (\text{no summation})$$

$$m_i = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i \quad (\text{generalized mass})$$

구조물은 3 개의 직선 운동 방향을 가집니다. 질량참여율은 이 3 개의 직선 운동 방향마다 각각의 모드가 전체 구조물의 거동에 기여하는 정도를 나타냅니다. 따라서 질량참여율은 1 차 모드의 값부터 누적하여 그 합이 80%를 넘는 것이 좋습니다. 일반적으로 질량참여율의 합이 80%가 넘는 운동 방향은 해석에 포함된 모드 수가 충분하다고 생각됩니다. 그리고 특정 방향으로 질량참여율의 합이 매우 작다면 모드 수를 늘려서 다시 모드 해석을 합니다.

3-3. 질량참여율이 너무 작을 때

어떤 구조물은 특정 방향의 질량참여율이 매우 작을 수도 있습니다. 만약 50 개의 모드를 합해도 그 방향의 질량참여율이 10%보다 작다면 이 구조물은 50 번째 이하의 모드 형상 중에는 해당 방향으로 움직이는 운동 특성이 거의 없는 것입니다. 이것은 이 구조물이 해당 방향으로 움직이기 어렵다는 뜻입니다.

어떤 구조물은 질량참여율이 작은 운동 방향으로 하중이 작용하지 않는 경우도 있습니다. 이럴 때는 질량참여율이 키우기 위하여 일부러 모드 개수를 늘리지는 않습니다. 하중이 작용하지 않기 때문에 움직이지 않을 것이기 때문입니다.

그러나 만약 하중이 작용하는 방향의 질량참여율이 저차 모드에서 매우 작지만 그 크기가 시험방법에 규정되어 있다면 그것을 만족하기 위해서는 아주 많은 개수의 모드를 사용해야 합니다.

4. 과도 해석의 시간 간격은 얼마가 적당한가

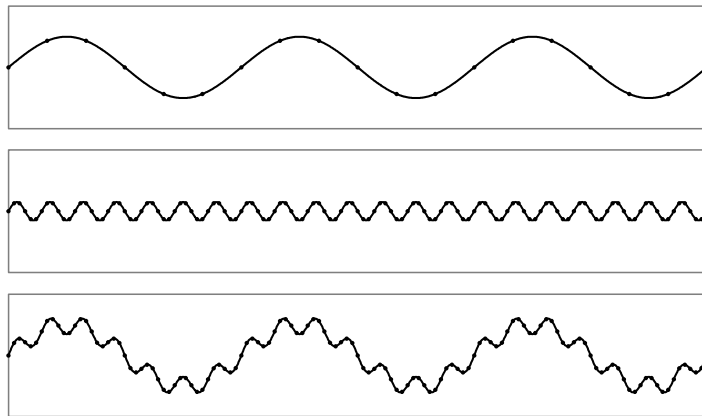
4-1. 적당한 시간 간격

동적 과도 해석에서는 매 시각마다 변위, 속도, 가속도로 나타나는 운동상태를 추정합니다. 그래서 각 시각 사이의 시간 간격을 적당한 크기로 정해야 합니다. 너무 작으면 해석 시간이 오래 걸리고 너무 크면 운동 상태를 왜곡시킵니다.

4-2. 최대 관심 주파수

동적 해석에서 구조물은 반드시 진동하는 특성이 있으므로 시간 간격은 이 진동을 표현할 수 있을 만큼 충분히 작아야 합니다. 따라서 해석을 하는 사람은 몇 Hz 진동 성분까지를 해석에 포함할 것인지 정해야 하고 모드 해석을 통해서 이것을 결정합니다.

예를 들어 50Hz 진동 성분을 해석에 포함하려면 시간 간격은 최소한 1/50 의 절반인 0.01 초보다 작아야 합니다. 50Hz 진동 성분의 주기는 0.02 초이고 이 구간을 두 개 이상으로 나누어야 진동 특성이 표현되기 때문입니다. 주파수 성분을 구분하려면 이 정도로 충분하지만 시간 영역에서 주파수 성분의 대략적인 파형을 표현하기 위해서는 하나의 주기를 6 개 정도로 나누어 시간 간격을 결정합니다.



[그림 3] 50Hz 와 350Hz 주파수 성분이 조합된 시간 응답

5. 실험모드와 해석모드의 유사성을 평가하는 방법

5-1. 실험모드

해석모드는 모드 해석을 통해서 찾은 해석 모델의 고유모드이고 실험모드는 실험을 통해서 추정된 실험대상의 고유모드입니다. 보통은 다수 시험 지점에 대해서 충격 시험을 하여 가속도계 또는 레이저 측정기에서 얻은 충격 응답을 신호 처리하여 고유진동수, 고유모드, 모드감쇠를 결정합니다. 실험모드는 실제 구조물의 응답이고 유한요소 모델은 실제 구조물을 잘 반영하기를 원하므로 두 결과에 차이가 있다면 유한요소 모델을 변경합니다.

5-2. 축소법

일반적으로 해석모드는 수만에서 수십만 개의 절점으로 표현되고 실험모드는 수십에서 수백 개의 절점으로 표현됩니다. 두 결과를 비교하려면 해석모드의 자유도를 축소하여 실험모드의 자유도와 일치시켜야 합니다. midas NFX 에서는 해석 모델의 절점 중에서 실험점의 좌표와 가장 가까운 절점을 자동으로 찾으며 모달축소법을 사용합니다.

5-3. 모드직교성(modal cross orthogonality)

$$MXO_{ij} = \phi_i^T M \phi_j$$

모드직교성은 해석모드와 실험모드 사이에 독립성을 나타냅니다. 해석모드 번호 i 와 실험모드 번호 j 에 따라 행렬로 표시되며 실험결과가 양호하고 해석 모델이 실제 구조물을 잘 반영한다면 모드 번호 $i=j$ 일 때 큰 값이 나옵니다.

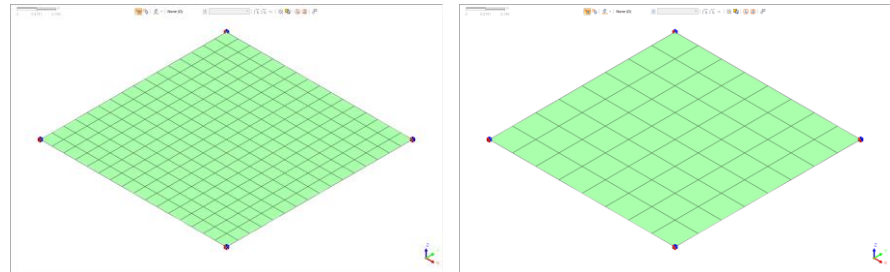
5-4. 모드상관계수(modal assurance criterion)

$$MAC_{ij} = \frac{(\phi_i^T \phi_j)^2}{(\phi_i^T \phi_i)(\phi_j^T \phi_j)}$$

모드상관계수는 해석모드와 실험모드 사이에 대응 정도를 나타냅니다. 이것은 모드 형상을 근거로 두 형상의 유사성을 나타내는 지표입니다. 모드직교성과 마찬가지로 해석모드 번호 i 와 실험모드 번호 j 에 따라 행렬로 표시되며 실험결과가 양호하고 해석 모델이 실제 구조물을 잘 반영한다면 모드 번호 $i=j$ 일 때 100%에 가까운 값이 나옵니다.

5-5. 예시

아래의 예시는 평판 유한요소 모델에 대해서 그보다 성긴 요소망을 사용한 유한요소 모델을 실험대상의 측정점을 표시한 것으로 가정하고 두 결과의 유사성을 비교한 것입니다.



유한요소 모델

실험대상의 측정 위치

[그림 4] 유한요소 모델과 실험대상의 측정 위치

평가 결과는 행렬로 표현되며 두 모드 해석의 결과가 고유진동수 크기의 순서로 정렬되었다면 그 값은 단위행렬과 비슷할수록 좋습니다. 모드 번호의 순서가 바뀌거나 대칭 모드가 존재하면 매우 큰 비대각 값이 발생합니다.

아래 그림 5 와 그림 6 은 각각 실험모드를 측정하고 기록한 것을 입력하기 위한 입력 데이터, 그리고 실험모드와 해석모드의 유사성을 평가한 결과입니다.

```

$
$ MODE 1 EIGENDATA.
$
3, 2, -5.578773E+00
5, 2, -2.008938E+01
7, 2, -4.032251E+01
9, 2, -6.348129E+01
11, 2, -8.756870E+01
3, 6, -5.298854E+00
5, 6, -8.941852E+00
7, 6, -1.105478E+01
9, 6, -1.193366E+01
11, 6, -1.208716E+01
-1, 1, 1.577834E+05
$
$ MODE 2 EIGENDATA.
$
3, 2, -2.593419E+01
5, 2, -5.927000E+01
7, 2, -5.200510E+01
9, 2, 4.389160E+00
11, 2, 8.550123E+01
3, 6, -2.007332E+01
5, 6, -9.052572E+00
7, 6, 1.697939E+01
9, 6, 3.701651E+01
11, 6, 4.206841E+01
-1, 2, 6.059634E+06
    
```

[그림 5] 실험모드 데이터 입력

CROSS ORTHOGONALITY MATRIX

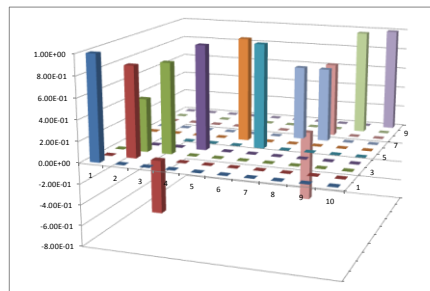
MODE I TEST	MODE J TAM	ORTHOGONALITY
1	1	9.998562E-001
2	2	8.644030E-001
2	3	-5.025119E-001
3	2	5.047812E-001
3	3	8.631364E-001
4	4	9.999472E-001
5	6	9.998581E-001
6	5	9.998632E-001
7	7	7.069934E-001
7	8	7.051527E-001
8	7	-7.043875E-001
8	8	7.077662E-001
9	9	9.997857E-001
10	10	9.937827E-001

MODAL ASSURANCE CRITERIA MATRIX

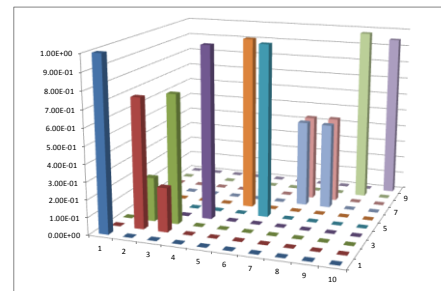
MODE I TEST	MODE J TAM	MAC
1	1	9.993427E-001
2	2	7.455116E-001
2	3	2.534631E-001
3	2	2.534592E-001
3	3	7.455228E-001
4	4	9.989542E-001
5	6	9.975587E-001
6	5	9.965693E-001
7	7	4.989591E-001
7	8	4.953768E-001
8	7	4.952843E-001
8	8	4.990522E-001
9	9	9.965467E-001
10	10	9.442600E-001

[그림 6] MXO와 MAC 출력

아래 그림은 0.01 보다 작은 값을 무시하는 옵션을 적용하고 영이 아닌 값만 그래프로 나타낸 것입니다.



modal cross orthogonality



modal assurance criterion

[그림 7] MXO와 MAC 그래프