

모드해석

TECHNICAL NOTE

모드해석

1. 모드해석 (Modal Analysis)

모드해석 또는 고유진동수해석(natural frequency analysis), 자유진동해석(free vibration analysis)은 구조물이 갖고 있는 고유진동수와 각 고유진동수에서의 변형형상(모드형상, mode shape)을 파악하여 구조물의 공진여부와 진동에 의한 변형형상을 예측하는 해석입니다.

만약 구조물 자체의 고유진동수와 외부하중의 작동주파수가 일치하게 되면 구조물에 공진(resonance)이 발생하게 됩니다. 구조물에 공진이 발생하면 진동과 소음이 급격하게 커지고 궁극적으로 구조물이 파괴될 수도 있습니다. 그러므로, 진동이나 주기하중이 지속적으로 작용하는 구조물의 경우에는 반드시 모드해석을 수행하여 공진의 발생 가능성을 검토하는 것이 좋습니다. 그리고, 모드해석을 통해 구조물의 공진이 예상되면 구조물의 고유진동수가 작동주파수 대비 1/3 이하로 낮아지거나 3배 이상 커지도록 설계를 변경할 필요가 있습니다.¹

모드해석은 모든 동해석의 기본이 되는 해석이며, 특히 기계구조물의 소음진동 특성(NVH: noise, vibration, and harshness)을 파악하는데 대단히 중요합니다.

먼저 구조물의 동적특성 및 모드해석과 관련된 주요 용어와 개념에 대해 정리해 봅니다.

- **고유진동수 (natural frequency)**

고유진동수(f)는 단위시간당 진동하는 회수를 의미하며, 구조물의 동적특성을 표현하는 가장 대표적인 개념입니다. 일반적으로 [Hz] 단위를 사용하여 초당 진동수(cycles/sec)로 나타냅니다.

구조물의 고유진동수는 구조물의 강성(k)에 비례하고 질량(m)에 반비례하는 특성($f \propto \sqrt{k/m}$)을 가지며, 특히, 구속위치에서 멀리 떨어진 위치에 있는 집중된 질량은 관성 효과로 인해 고유진동수를 크게 감소시킵니다.

고유진동주기(natural period, T)는 고유진동수의 역수($T = \frac{1}{f}$)로, 1회 진동하는데 소요되는 시간([sec])을 의미합니다.

- **모드형상 (mode shape)**

모드형상은 각 고유진동수에서 구조물의 변형형상, 즉, 진동하는 형상을 의미합니다.

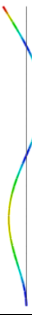
<그림 1>과 같이 모드형상은 구조물이 가장 쉽게 변형할 수 있는 형상부터 저차모드를 가지므로, 고차모드로 갈수록 구조물에서 해당 모드형상이 발생할 가능성은 낮아진다고 볼 수 있습니다.²

계산된 모드형상을 파악함으로써 설계에서 영향이 큰 고유진동수와 반대로 영향이 작은 고유진동수를 파악할 수 있습니다. 각 모드의 변형형상(모드형상)과 작용하중의 방향이 서로 다른 경우에는 해

¹ 진동수와 주파수 모두 “frequency”를 의미하는 같은 용어이지만, 여기에서는 구조물의 (내부) 진동과 관련된 것은 진동수, 외부하중의 작용과 관련된 것은 주파수라고 표기하겠습니다.

² 역학적인 관점에서 1차모드의 모드형상이 최소 변형에너지(strain energy)를 갖는 형상이므로 가장 쉽게 변형이 가능하고, 고차모드로 갈수록 보다 큰 변형에너지를 갖게 되므로 변형이 그만큼 어려워 집니다. (<표 1> 참고)
(변형에너지 또는 탄성에너지는 변형에 의해 탄성체에 저장되는 에너지입니다. 위치에너지와 유사한 포텐셜에너지이며, 외력이 제거된 후에 탄성체가 원래 상태로 되돌아오기 위하여 이 변형에너지가 사용됩니다)

당 모드의 고유진동수의 영향이 매우 작습니다. 예로, 작용하중의 방향이 수직으로 고정되어 있다면, 수직방향을 제외한 다른 방향의 모드형상에 해당하는 모드의 고유진동수는 영향이 매우 작습니다.

모드	1차모드	2차모드	3차모드	4차모드	5차모드
모드형상					
고유진동수 [Hz]	102.2	640.1	1790.9	3505.7	5787.0
변형에너지 (최대값)	1.99×10^4	7.16×10^5	5.16×10^6	1.82×10^7	4.54×10^7

〈표 1〉 외팔보(cantilever)의 모드해석 예

이론적으로 구조물은 전체 자유도 개수만큼 모드개수와 모드형상을 갖습니다. 하지만, 일반적으로 유한요소해석을 이용하여 모드해석을 수행할 때에는 계산할 모드개수를 지정하거나, 계산하려는 모드의 범위를 관심 고유진동수 범위로 지정하여 해석을 수행합니다.

- 공진 (resonance)

모드해석을 수행하는 가장 중요한 이유는 구조물이 공진하는 고유진동수를 찾아내는 것입니다.

구조물의 고유진동수가 구조물에 가해지는 진동/하중의 작동주파수의 근처에 있게 되면 구조물에 공진이 발생하게 됩니다. 대부분의 경우, 작동주파수 근처의 첫번째 또는 두번째 고유진동수는 상당한 크기의 진동을 유발하게 됩니다.¹ (〈그림 1〉 참고)

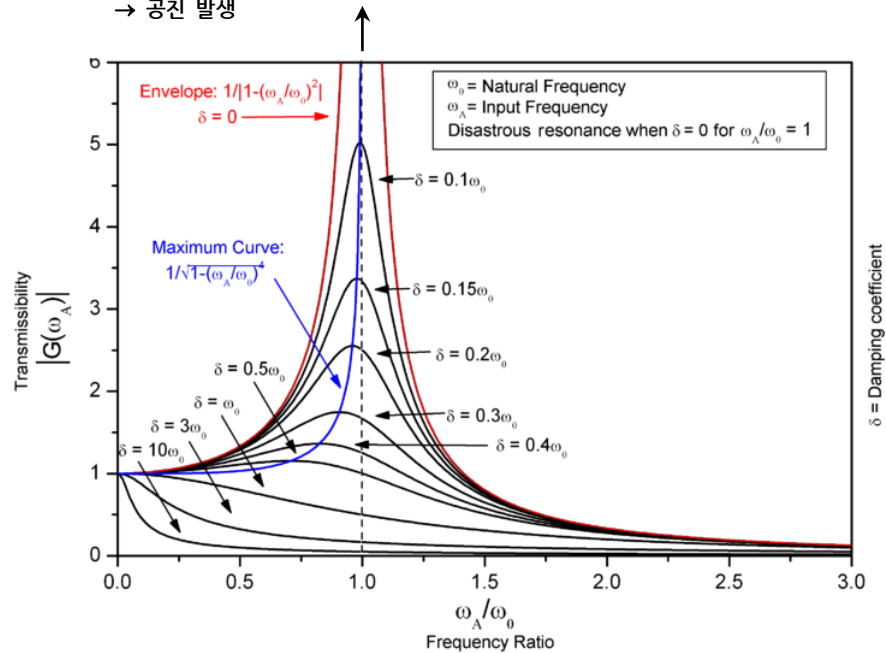
하지만, 고유진동수와 작동주파수가 유사하다고 하여 무조건 공진을 일으키는 것은 아니며, 작동주파수가 고유진동수와 유사한 상태를 일정 시간 동안 지속하면서 두 진동수의 방향이 서로 영향을 줄 때에만 공진현상이 발생하게 됩니다. 이와 같은 공진상태에 놓일 수 있는 구조물은 공진상태를 피할 수 있도록 설계하여야 합니다.²

앞에서 설명한 것처럼 고유진동수는 구조물의 강성에 비례하고 질량에 반비례하는 특성을 가지므로, 구조물의 고유진동수를 조정하기 위해서는 구조물 강성의 증가, 질량의 감소, 그리고 구조물 내 질량의 재분배 등이 필요합니다.

¹ 예로, 지진발생시 건물의 고유진동수와 지진의 작동주파수가 일치하게 되면 건물에 공진이 발생하고, 이러한 공진이 지속되면 건물은 엄청난 손상을 입게 되어 결과적으로 붕괴할 수 있습니다.

² 자동차 타이어의 트레드(tread, 돌기패턴)는 타이어와 도로의 접촉면에서 물기로 인한 미끄러짐을 방지하기 위한 홈입니다. 주행중에 트레드와 도로가 부딪히면 진동이 발생하는데, 이 진동이 자동차 부품 중 어느 한 부품의 고유진동수와 일치하면 그 부품에는 공진이 발생할 수 있습니다. 이것을 방지하기 위하여, 즉 트레드와 도로의 접촉에서 일정한 주파수의 진동이 반복하여 발생하지 않도록 트레드 패턴은 아주 불규칙하게 디자인 되어 있습니다.

감쇠가 없을 경우, 고유진동수와 입력주파수가 근접할수록 응답이 무한대로 증폭됨
→ 공진 발생



〈그림 1〉 입력주파수/고유진동수 비율과 구조물 응답의 관계 (출처: Wikipedia)

참고로, 구조물의 동적특성 또는 동적거동을 파악하기 위한 유한요소해석 방법은 다음과 같이 세 가지로 분류할 수 있습니다.

✓ **모드해석**

위에서 설명한 것처럼 구조물의 고유진동수와 모드형상을 파악하여 구조물의 공진 여부나 진동에 의한 변형형상을 예측하는 해석입니다.

✓ **과도응답해석 (transient response analysis, time history analysis)**

시간에 따라 변하는 외부하중의 작용에 대한 구조물의 응답(반응)을 예측하는 해석입니다.

✓ **주파수응답해석 (frequency response analysis, harmonic analysis)**

조화가진(harmonic excitation)에 대한 구조물의 응답(반응)을 예측하는 해석입니다.¹

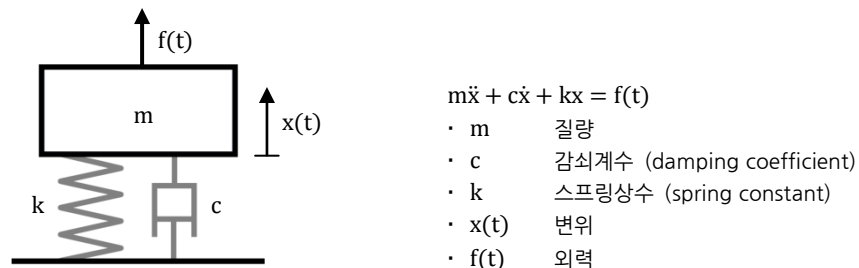
과도응답해석에서는 매 시간에서 구조물의 응답을 계산하지만, 주파수응답해석은 (조화가진으로 인해 구조물도 일정한 시간 간격으로 동일한 응답을 반복하므로) 시간에 따라 변하는 응답이 아니라 각 주파수별(예, 회전속도별) 정상상태(steady-state) 응답을 계산합니다.

이러한 특징으로 인해 과도응답해석에서는 외부 작용하중/가진이 시간(t)의 함수로 정의되고, 주파수응답해석에서는 주파수(f)의 함수로 정의됩니다.

¹ 조화가진 또는 조화하중(harmonic load, cyclic load)은 진동을 유발하는 외부작용이 sine 곡선의 형태와 같이 일정한 시간 간격으로 반복되는 하중입니다. 조화가진의 예로는 회전체(rotating machinery), 헬리콥터의 날개 등이 있습니다.

2. 모드해석의 이론과 의미

〈선형정적해석〉장에서 설명한 단자유도계의 운동방정식을 다시 살펴보겠습니다.



〈그림 2〉 단자유도계(single DOF system)의 운동방정식

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

이 식에서 $m\ddot{x}$ 는 관성력(inertial force), $c\dot{x}$ 는 감쇠력(damping force), kx 는 복원력(elastic force)입니다.¹

모드해석은 구조물에 감쇠와 외력이 없는 조건에 대한 자유진동해석(undamped free vibration)입니다.²

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

이 식을 일반적인 다자유도계(multiple DOF system)에 대한 행렬식으로 표현하면 다음과 같습니다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

이 식은 단순조화운동(simple harmonic motion, SHM)을 나타내며, 단순조화운동(SHM)의 일반적인 해는 $\{x\} = \{\Phi\}\sin(\omega t)$, 즉 $\{x\} = \{\Phi\}e^{i\omega t}$ 형태로 가정할 수 있습니다.³

가정해 $\{x\} = \{\Phi\}e^{i\omega t}$ 로부터 $\{\ddot{x}\} = -\omega^2\{\Phi\}e^{i\omega t}$ 이고, 이 두 항을 식에 대입하면 다음과 같습니다.

$$-\omega^2[M]\{\Phi\} + [K]\{\Phi\} = 0$$

$$([K] - \omega^2[M])\{\Phi\} = 0$$

이 식은 고유치문제(eigenproblem)이며, ω^2 은 고유치, ω 는 진동수, 그리고 $\{\Phi\}$ 는 모드형상이 됩니다.⁴

마지막 방정식으로부터 이 방정식의 해를 구하는 것, 즉 모드해석은 결국 관성항($\omega^2[M]$)과 탄성항($[K]$)이 서로 평형(balance)이 되는 진동수 ω 와 모드형상 $\{\Phi\}$ 를 찾는 것을 의미함을 알 수 있습니다.⁵

¹ 관성은 변화에 대한 저항, 감쇠는 운동에너지의 손실을 의미합니다.

² “undamped”는 감쇠가 없음($c\dot{x}=0$), “free”는 외력이 없음($f=0$)을 의미합니다. 반대는 “damped”, “forced”입니다.

³ 이 가정해는 진동수 ω 에 따라 sine 곡선의 형태로 움직이는 모드형상 (또는 진폭) $\{\Phi\}$ 를 갖는 것을 의미합니다.

⁴ 고유치문제는 $([A] - \lambda[B])\{x\} = 0$ 과 같은 행렬방정식에서 $\{x\} = 0$ 의 자명해(trivial solution)가 아닌 해를 계산하는 문제입니다. 이 해는 $\det([A] - \lambda[B]) = 0$ 으로 구할 수 있고, 계산된 λ_i 를 고유치(eigenvalue), 각 λ_i 에 대한 $\{x\}$ 를 고유벡터(eigenvector)라고 합니다. (고유치와 고유벡터는 행렬식의 크기만큼 쌍(eigenpair)으로 계산됩니다)

⁵ 참고로, $([K] - \omega^2[M])$ 을 동적강성(dynamic stiffness)이라고 하며, 모드해석은 이 동적강성이 무효화되는 진동수, 모드형상을 찾는 것으로도 생각할 수 있습니다.

관성력과 탄성력이 상호작용하여 평형이 되면서 진동이 발생한다는 의미를 다음의 예로 알아봅시다.

먼저, 탄성력은 구조물이 변형 후에 원래 형상으로 되돌아가는 복원력이고, 관성력은 변화에 대한 저항능력으로 운동을 그대로 유지하려는 힘입니다.

보를 휘었다가 놓으면(〈표 1〉의 1차모드 참고), 보의 탄성력이 작용하여 보를 원래의 초기 평형위치로 복귀시키려고 합니다. 그러나, 관성력은 보의 운동을 계속 유지시키려 하기 때문에 초기위치로 되돌아가는 보가 초기 위치에서 바로 정지하지 못하고 일단 지나치게 됩니다.

만약 관성력이 크면 보의 운동방향을 바꾸는 것이 어렵기 때문에 결과적으로 보의 운동(진동)은 점차 둔화될 것이고, 반대로 탄성력이 크면 몇 회의 반복 후에 결국 초기 평형상태로 되돌아가서 운동을 정지할 것입니다.

그러나, 관성력이 탄성력과 평형을 이루게 되면, (운동에너지를 감소시켜주는 감쇠가 없으면) 보는 이 운동을 정지하지 못하고 결국 일정한 속도로 운동(진동)을 무한반복하게 됩니다.¹

이 일정한 운동(진동)속도가 고유물의 고유진동수이고, 이때의 운동(진동)거동이 모드형상입니다.

그리고, 위의 고유치문제로부터 계산한 진동수 ω 는 [rad/sec] 단위를 갖는 원진동수(circular frequency) 또는 각진동수(angular frequency)이고, 우리가 관심있는 [Hz, cycles/sec] 단위의 진동수(cyclic frequency) f 는 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ 의 관계식으로 계산합니다.

모드해석의 고유치문제를 풀면 행렬식 크기, 즉 구조물의 자유도 개수(N)만큼 고유진동수 f_i ($i=1\sim N$)와 각 고유진동수별 모드형상 $\{\Phi\}$ 를 얻을 수 있습니다. 이렇게 계산된 각 고유진동수와 모드형상의 쌍($f_i, \{\Phi\}$)은 관성항과 탄성력이 서로 평형이 되는 상태이며, 작동주파수가 f_i 인 (또는 이에 근접한) 외부하중/진동이 작용하면 구조물이 무한진동을 반복하면서 공진이 발생하게 되는 것입니다.

마지막으로, 계산된 모드형상 $\{\Phi\}$ 는 변형형상 자체만 의미가 있고, 변형(변위)의 크기는 실제 변형량이 아니라 정규화된(normalized), 스케일링된 값이므로 크게 중요하지 않습니다.

모드해석의 고유치문제 행렬식 $([K] - \omega^2[M])\{\Phi\} = 0$ 을 푸는 것은 $\det([K] - \omega^2[M]) = 0$ 을 만족하는 고유진동수 ω 를 찾는 것입니다. 고유진동수 ω 는 유일해(unique solution)이지만, $\det([K] - \omega^2[M]) = 0$ 으로 인해 고유진동수 ω 에 대해 가능한 모드형상 $\{\Phi\}$ 는 무수히 많이 존재합니다. 그리고, 무수히 많은 해인 $\{\Phi\}$ 는 서로 선형종속(linear dependent)입니다. 그러므로, 모드형상 결과는 선형종속 관계를 갖는 무수히 많은 $\{\Phi\}$ 를 대표하여 정규화된 형태로 제공됩니다. 이러한 이유로 모드형상은 변형형상이 중요하고, 크기는 큰 의미가 없습니다.

3. 강체모드 (Rigid Body Mode, Mechanism Mode, Stress-free Mode)

구조물에 구속조건이 부여된 상태에서 변위가 발생하도록 하면 구조물에 변형과 응력이 발생하고, 이에 따라 변형에너지도 발생합니다. 그러나, 구속조건이 없는 구조물의 경우에는 어떠한 변형과 응력도 발생하지 않고, 초기형상 그대로 병진 또는 회전이동만 하게 됩니다. 이러한 구조물의 거동을 강체운동(rigid body motion)이라고 하고, 이러한 상태의 구조물이 나타내는 모드형상을 강체모드라고 합니다.

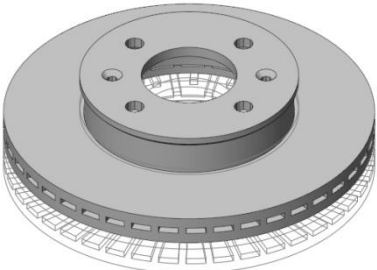
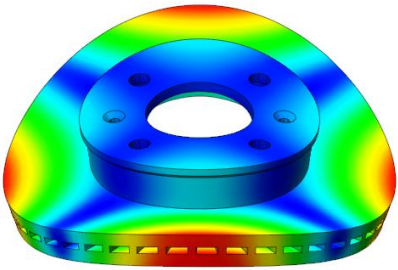
¹ 즉, 보가 변형의 한쪽 끝점에 도달하면 운동방향을 반대로 바꿔야 하므로 관성력이 약해지지만 초기위치로 돌아가려는 탄성력이 회복되어 초기위치로 되돌아가는 운동을 합니다. 그리고, 초기위치에 도달하여 탄성력이 약해지면 반대로 운동을 계속 유지하려는 관성력이 회복되어 반대쪽 끝점까지 계속 운동하는 현상이 발생하여, 결국 보는 이 운동(진동)을 멈추지 못하고 무한반복하게 되는 것입니다.

참고로, 만약 감쇠가 존재하면, 감쇠가 운동에너지를 소멸시켜주므로 이러한 무한진동 현상은 발생하지 않습니다.

즉, 강체모드는 구속조건이 없는 상태에 나타내는 모드이며, 변형이 없이 진동수가 0Hz인 상태에서 각 방향으로 병진/회전의 강체운동만 하는 모드형상들을 보입니다. 예로, 비행 중인 항공기의 경우, 특정 구속조건을 부여할 수 없으므로 구속조건 없이 모드해석을 수행하며, 이 경우에 저차모드에서 강체모드가 나타납니다.

아무런 구속조건이 지정되지 않은 일반적인 3차원 모델은 X, Y, Z축 방향으로의 병진이동모드(translation) 3개와 세 축에 대한 회전모드(rotation) 3개, 총 6개의 강체모드를 갖습니다. 이에 따라 1차부터 6차모드까지 6개의 강체모드가 발생하고, 이후 7차모드부터 실제로 의미가 있는 진동모드가 됩니다. 7차모드부터는 내부 변형에너지를 가지며, 이러한 모드를 강체모드와 구분하여 **변형모드(flexible mode)**라고 합니다.

참고로, 변형모드는 구조물 절점간의 상대변위에 의해 발생하는 모드이며, 역으로 강체모드에서는 구조물의 절점간에 상대변위가 발생하지 않습니다.

모드	강체모드	변형모드
모드형상	 (Z방향 병진모드)	
고유진동수 [Hz]	$4.74 \times 10^{-11} (\approx 0)$	1869.09
최대 변형에너지	$1.53 \times 10^{-7} (\approx 0)$	1.90×10^4

〈표 2〉 강체모드와 변형모드의 비교 (모드형상과 최대 변형에너지)¹

강체모드는 구조물의 각 자유도방향으로 충분하게 구속되지 않은 경우에도 발생할 수 있습니다. 이러한 예로는 힌지나 볼조인트 위에 평판이 놓여 있는 경우, 또는 구조물의 두 부분이 적절하게 연결되지 않은 경우 등이 있습니다. 그러므로, 의도하지 않게 강체모드가 발생한 경우에는 해석모델의 적절성, 예로 모델/요소의 연결관계(connectivity)와 구속조건의 타당성 등을 검토하여야 합니다.²

¹ 유한요소해석에서는 수치오차로 인해 강체모드의 진동수와 변형에너지가 정확하게 0이 아니라, 0에 가까운 아주 작은 값(10^{-3} 정도)으로 계산됩니다.

² 이러한 특징을 활용하여 복잡한 해석모델에 대해서는 요소망을 작성한 후, 실제 해석의 수행에 앞서 모델의 적절성, 특히 요소의 연결관계를 확인하기 위하여 모드해석을 수행하기도 합니다. 강체모드가 발생하거나 국부모드가 발생하면 해당 부분에서 요소의 연결관계가 올바르지 않거나, 요소의 품질이 좋지 않음을 나타냅니다.

4. 모드해석의 수행절차

일반적인 모드해석의 수행절차와 주의/참고사항은 다음과 같습니다.

(1) 해석 대상 구조물의 기하형상 작성

CAD에서 작성한 모델을 불러오거나, 프로그램(midas NFX (Analyst))의 전처리 기하모델링 기능을 이용하여 기하형상을 작성합니다.

특히, 모드해석에서 지나치게 정교한 모델은 오히려 **국부모드(local mode)**를 유발할 수 있으므로, 가급적 중요하지 않은 부분들, 지나치게 정교한 부분들은 최대한 간략화시키는 것이 좋습니다.

추가적으로 모드해석에서 주의할 사항은 <선형정적해석> 장에서 설명한 것처럼 해석모델의 기하형상을 포함한 모든 조건이 대칭이어도 모드형상은 대칭이 아닐 수 있으므로 모드해석에서는 대칭모델, 대칭조건을 이용한 대칭해석을 수행하지 않도록 합니다.

(2) 유한요소모델 작성

완성된 기하형상에 대해 요소망을 생성합니다.

자동요소망생성 기능을 이용하여 간편하게 요소망을 생성할 수 있으며, 대부분의 모드해석에서는 고차사면체 요소망을 이용하는 것으로 충분합니다.

midas NFX (Designer)에서는 사용자가 별도로 요소망을 작성하지 않으면, 해석을 수행할 때 프로그램이 자동으로 적절한 요소망을 생성하므로 이 단계는 생략할 수도 있습니다.

모드해석에서는 구조물의 강성뿐만 아니라 질량도 함께 계산에 사용되는데, (1)단계에서 설명한 간략화 작업으로 생략된 부분이 많다면, 해당 부분을 질량요소로 표현하여 해석모델에 추가할 수도 있습니다. midas NFX (Designer)에서는 리모트하중을 이용하여 생략될 파트의 질량(무게)를 해석모델에 연결/추가시켜줄 수 있습니다.

(3) 재료물성 정의

해석모델의 각 부분(파트)에 재질을 정의합니다.

모드해석의 계산에서는 **강성과 질량**이 요구되므로 이를 위해 강성의 계산을 위한 **탄성계수, 프와송비**, 그리고 질량의 계산을 위한 **질량밀도**, 세 개의 재질특성이 필요합니다.

만약, 선형정적해석 등에서 자중의 계산을 위해 질량밀도(ρ) 대신 중량밀도(ρg)를 입력한 경우에는 <그림 3>의 모드해석 해석제어 대화상자에서 **전체 질량행렬 스케일팩터(ξ)**에 $1/g$ 의 값을 입력하여 프로그램으로 하여금 계산된 중량(weight, W)을 질량(mass, $M=W \times \xi=W/g$)으로 변환하여 사용하도록 지정합니다. 이 경우, 중력가속도 크기는 반드시 현재 사용중인 단위계 기준의 값을 사용하여야 합니다. (예: [N-mm-sec] 단위의 경우, $g=9806\text{mm/sec}^2$, $\xi=1/g=0.000101978\text{.....}$)

(4) 경계조건의 지정

모드해석은 외력이 없는 조건에 대한 자유진동해석이므로 하중조건은 필요하지 않고, 경계조건(구속조건)만 지정하면 됩니다.

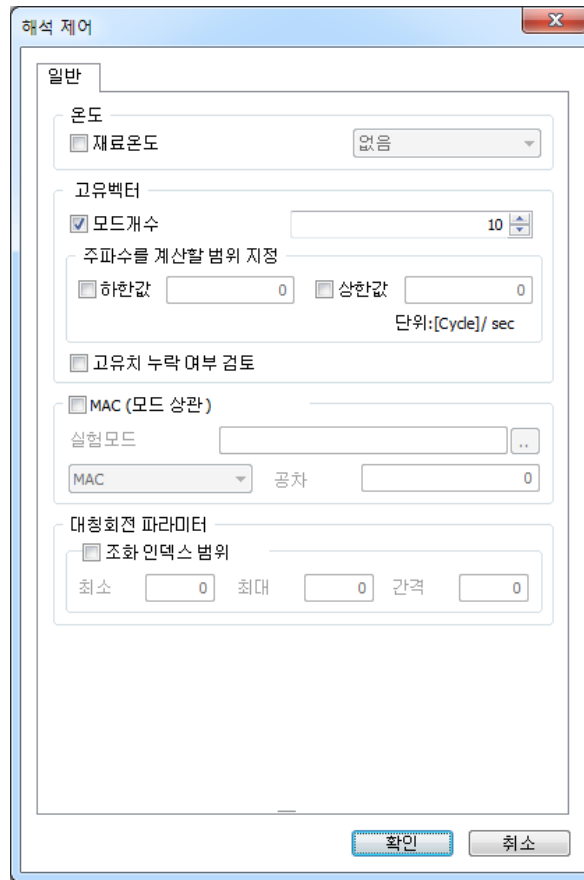
그리고, 앞에서 설명한 것처럼 강체모드해석을 할 때에는 경계조건이 필요하지 않습니다.

(5) 해석조건 설정과 해석수행

모드해석의 수행조건을 설정합니다.

대부분의 경우에는 계산하고자 하는 **모드개수**만 지정하면 됩니다. midas NFX (Designer)에서 기본으로 계산되는 모드개수는 10개이며, <그림 3>의 해석케이스의 <해석제어> 대화상자에서 지정/

변경할 수 있습니다.



〈그림 3〉 모드해석의 해석제어 대화상자

✓ **모드개수**

계산할 모드개수를 지정합니다.

대부분의 경우에 1차모드를 포함한 저차모드들이 가장 중요하므로 많은 수의 모드를 계산할 필요는 없지만, 솔리드모델에 대한 강제모드해석을 수행할 경우, 1~6차모드까지 강제모드이고, 7차모드부터 관심이 있는 변형모드이므로 이를 고려하여 모드개수를 지정합니다.

✓ **주파수를 계산할 범위 지정**

계산할 주파수(f , [Hz]) 범위를 사용자가 명시적으로 지정할 수 있습니다.

특정 범위를 지정하지 않으면 기본적으로 1차모드부터 차례대로 지정한 모드개수만큼 계산하며, 대부분의 일반적인 모드해석에서는 지정할 필요가 없습니다.

✓ **고유치 누락 여부 검토**

고유치(즉, 진동수)를 계산한 다음에 누락된 고유치, 즉 찾지 못한 고유치가 있는지 검사하는 옵션(sturm sequence check)입니다.

고유치 누락여부 검사에도 고유치계산 만큼의 연산이 필요하므로 해석시간이 증가합니다.

✓ **전체 질량 계산**

해석과정 중에 모드해석에 사용된 전체 해석모델의 질량을 계산하여 출력해 줍니다.

모델 간략화 등으로 생략된 부분이 많은 경우에 해석모델의 적절성을 검토하거나, 현재 작업단위계에서 **질량밀도** 또는 **전체 질량행렬 스케일팩터** 등의 값이 올바른지 확인하고자 할 때 유용하게 사용할 수 있습니다.

✓ **전체 질량행렬 스케일 팩터**

해석과정 중 계산된 질량행렬([M])에 이 스케일팩터를 곱하여 모드해석의 실제 질량행렬로 사용합니다.

앞에서 설명한 것처럼 주로 재질정의에서 질량밀도 대신 중량밀도를 입력한 경우에(만) 변환을 위하여 사용합니다.

✓ **분포(일관) 질량 계산**

모드해석의 질량행렬([M])로 분포질량행렬(coupled mass, consistent mass)을 사용할 것인지, 아니면 집중질량행렬(lumped mass)을 사용할 것인지 지정합니다.¹

기본은 계산된 그대로의 분포질량행렬을 사용하는 것이며, 이 옵션을 끄면 집중질량행렬이 사용됩니다. 특별한 이유가 없는 한, 기본인 분포질량행렬을 사용하는 것이 좋습니다.

그리고, 모드해석에서는 거의 대부분의 경우에 모드형상 결과만 검토하므로, 기본으로 **변위** 결과만 출력합니다. 만약 보강위치 등을 검토하기 위하여 변형에너지 결과를 확인할 필요가 있다면, 해석케이스 대화상자의 <결과제어>에서 **변형에너지** 결과를 출력하도록 지정합니다.

(6) **결과 분석**

해석이 정상적으로 완료된 후에 각 모드별 **진동수(f, [Hz])**와 **모드형상**을 확인하여 모드해석 결과의 적절성, 공진의 발생 가능성, 그리고 소음/진동에 대한 설계 안정성 등을 평가합니다.

¹ 집중질량행렬은 요소의 질량을 절점에서만 계산하여 대각행렬(diagonal matrix)이 되도록 만든 것입니다. 적은 저장공간과 빠른 연산시간 등 계산효율 측면의 장점은 있지만, 결과의 정확도가 다소 떨어질 수 있습니다.

<예> 2개의 절점으로 정의된 봉요소의 질량행렬 (ρ : 질량밀도, A : 단면적, L : 길이)

· 분포질량행렬: $[M] = \int_0^L \rho A [N]^T [N] dx = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (수치적분으로 계산, $[N]$: 형상함수(shape function))

· 집중질량행렬: $[M] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (요소의 질량 ρAL 을 양끝 절점에 균등배분)

5. 결과분석

모드해석의 결과분석에서 가장 중요한 것은 공진발생 가능성의 검토입니다.

- 공진발생 가능성의 검토

가장 먼저 고유진동수가 외부하중/가진의 작동주파수 범위 내에 있는지 확인합니다.

보통 처음 세 개의 저차모드(1차~3차모드)의 고유진동수를 확인하고, 이 세 개 모드의 고유진동수가 하중/가진의 작동주파수의 범위를 벗어나 있으면 공진에 대해 안전하다고 판단할 수 있습니다.

만약 세 개 모드의 고유진동수가 작동주파수 범위 내에 있으면 공진이 발생할 수 있음을 의미합니다. 이 경우에 하중/가진의 작용방향이 분명하다면, 추가적으로 각 모드에 대한 질량참여율과 질량참여 방향을 검토합니다. 하중의 작용방향과 모드형상이 질량참여율이 높은 방향이 일치하지 않으면, 해당 모드는 동적거동의 안정성을 해치지 않습니다. 그러나, 두 방향이 동일하면 공진의 발생을 피하기 위하여 구조물의 설계를 변경해야 합니다.

이 경우, 실제 작동환경에서 하중/가진의 방향이 조금씩 변할 수도 있으므로 주의가 필요하고, 불확실할 경우에는 최악의 상황을 고려/가정하여 해석과 설계를 수행하는 것이 좋습니다.

구조물의 설계를 변경할 때에는 구조물의 고유진동수가 작동주파수의 1/3 이하로 되게 하거나 3배 이상 커지도록 합니다.

유효질량, 질량참여율 등의 정보는 “모델파일이름(A)_해석케이스이름(B)” 형태의 파일이름을 갖는 텍스트형식의 결과출력파일(A_B.OUT)에서 확인할 수 있습니다. (<그림 4> 참고)

MODAL PARTICIPATION FACTORS AND EFFECTIVE MASS							
REFERENCE POINT = 0 (2.392E+003,3.500E+003,1.282E+003) (CENTER OF MASS)							
MODAL PARTICIPATION FACTORS							
MODE NUMBER	T1	T2	T3	R1	R2	R3	
1	1.971795E+002	-7.805842E+000	-2.506077E+001	8.014326E+004	8.415660E+004	4.400217E+005	
2	5.111178E+001	4.418640E+001	1.217503E+002	-3.876447E+005	-2.286084E+005	1.836997E+005	
3	2.931562E+001	-2.975734E+001	2.448666E+001	-5.886988E+004	-1.573549E+004	-5.638983E+004	
4	4.498655E+001	2.596531E+001	1.692654E+000	-2.023431E+004	8.319792E+004	-1.619437E+005	
5	4.260456E+001	-3.482495E+001	2.813911E+000	2.633789E+004	-1.569203E+004	-8.662126E+004	
MODAL EFFECTIVE MASS							
MODE NUMBER	T1	T2	T3	R1	R2	R3	
1	3.887977E+004	6.093117E+001	6.280420E+002	6.422942E+009	7.082334E+009	1.936191E+011	
2	2.612414E+003	1.952438E+003	1.482313E+004	1.502684E+011	5.226182E+010	3.374559E+010	
3	8.594057E+002	8.854990E+002	5.995966E+002	3.465663E+009	2.476056E+008	3.179812E+009	
4	2.023790E+003	6.741973E+002	2.865078E+000	4.094271E+008	6.921893E+009	2.622575E+010	
5	1.815149E+003	1.212777E+002	7.918097E+000	6.936842E+008	2.462400E+008	7.503242E+009	
TOTAL 4.619053E+004 4.785842E+003 1.606156E+004 1.612601E+011 6.675989E+010 2.642735E+011							
PERCENT MODAL MASS							
DIRECTION	TOTAL	MODAL	PERCENT	}			유효질량
1	7.296462E+004	4.619053E+004	63.31				
2	7.296462E+004	4.785842E+003	6.56				
3	7.296462E+004	1.606156E+004	22.01				
4	5.911521E+011	1.612601E+011	27.28				
5	3.763948E+011	6.675989E+010	17.74				
6	8.376037E+011	2.642735E+011	31.55	}			질량참여율
REAL EIGENVALUES							
MODE NUMBER	EIGENVALUE	RADIANS	CYCLES	GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS	ORTHOGONALITY LOSS	ERROR MEASURE
1	1.464249E+000	1.210061E+000	1.925873E-001	1.000000E+000	1.464249E+000	0.000000E+000	5.520197E-009
2	5.202160E+000	2.280824E+000	3.630045E-001	1.000000E+000	5.202160E+000	4.388453E-012	1.484005E-009
3	1.161534E+001	3.408129E+000	5.424206E-001	1.000000E+000	1.161534E+001	3.647928E-012	7.271453E-010
4	1.899540E+001	4.358371E+000	6.936563E-001	1.000000E+000	1.899540E+001	2.012377E-011	4.315880E-010
5	2.986109E+001	5.464530E+000	8.697070E-001	1.000000E+000	2.986109E+001	3.506354E-012	4.488161E-010

〈그림 4〉 결과출력파일의 유효질량, 질량참여율 정보의 예 (.OUT 파일)

- 고유진동수의 조정

구조물의 고유진동수를 조정할 때에는 고유진동수(f)가 구조물의 강성(k)에 비례하고 질량(m)에 반비례하는 특성($f = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}$)을 활용합니다. 즉, 구조물의 강성을 증가시키거나 질량을 줄이면 고유진

동수가 커지고, 반대로 강성을 줄이거나 질량을 증가시키면 고유진동수는 낮아집니다.

구조물의 강성을 높이기 위하여 구조물을 보강할 때에는 관심 모드에서 변형에너지가 높은 부분을 찾습니다. 변형에너지가 높은 부분은 결국 변형이 크게 발생하는 부분이므로 이 부분을 보강하여 강성을 키우는 것이 가장 효과적입니다. 이처럼 구조물의 강성을 키워주는 보강은 변형에너지를 낮추고, 고유진동수는 높게 됩니다.

- **모드형상의 검토**

앞에서 얘기한 것처럼 모드형상은 변형형상 자체만 의미가 있고, 변형(변위)의 크기는 실제 변형량이 아니라 정규화된(normalized), 스케일링된 값이므로 크게 중요하지 않습니다.

모드형상을 확인할 때, 변형형상의 확인/구분이 명확하지 않으면 애니메이션으로 한 주기 동안의 전체 진동거동을 검토하는 것이 좋습니다.

예로, <표 1>의 외팔보 예제에서 1차모드의 모드형상이 오른쪽으로 변형한 것으로 그려져 있지만, 실제 해석에서는 왼쪽으로 변형형상이 그려질 수도 있습니다. 이 두 개의 결과는 애니메이션으로 한 주기 동안의 진동거동을 확인하면 동일한 결과(왼쪽/오른쪽으로 반복하며 변형하는 진동형상)를 보이며, 결국 동일한 모드형상인 것입니다.

즉, 모드형상은 선형정적해석 결과의 변형처럼 정적인 것이 아니라 주기적으로 일정하게 진동하는 동적인 형상이므로, 정지된 변형형상의 이미지가 어느 방향으로 변형하여 그려졌는지는 아무런 의미가 없습니다.

6. 프리스트레스 모드해석 (Prestressed Modal Analysis)

프리스트레스 모드해석은 구조물이 프리스트레스(prestress)를 갖는 상태에서 고유진동수와 모드형상을 분석하는 모드해석입니다.

- 프리스트레스 모드해석

프리스트레스의 상태는 구조물의 고유진동수에 큰 영향을 미칠 수 있습니다.

아래 <표 3>의 예와 같이, 인장력은 고유진동수를 높여주고, 반대로 압축력은 구조물의 고유진동수를 급격하게 낮추면서 임계좌굴하중(critical buckling load)에서 0의 진동수를 발생시킵니다.¹

이와 같은 프리스트레스와 진동수의 관계는, 줄을 뽀뽀하게 잡아 당긴 상태에서 튕기면 줄이 빨리 진동하고, 반대로 줄이 약간 처지도록 느슨하게 만들고 튕기면 아주 천천히 출렁거리는 현상으로 쉽게 이해할 수 있습니다.



모드	고유진동수 f [Hz]		
	프리스트레스 없음	인장 프리스트레스 조건	압축 프리스트레스 조건
1차	102.2	239.7	7.8
2차	509.9	563.7	447.6
3차	640.1	895.8	1495.7

<표 3> 프리스트레스의 영향에 의한 외팔보의 고유진동수 변화 예

프리스트레스 모드해석의 고유치문제 행렬방정식과 풀이방법은 2. 모드해석의 이론과 의미에서 살펴본 일반 모드해석의 것 $([K] - \omega^2[M])\{\Phi\} = 0$ 과 동일하며, 다만 전체 강성을 계산할 때 일반 모드해석에서 사용하는 구조물의 기본 강성(K)에 프리스트레스에 의한 강성(K_{ps})이 더해집니다.

$$([K + K_{ps}] - \omega^2[M])\{\Phi\} = 0$$

- 프리스트레스 모드해석의 수행

프리스트레스 모드해석을 수행할 때에는 앞에서 설명한 일반 모드해석이 아니라, 다음과 같이 2개의 서브케이스로 구성되는 일반 프리스트레스 해석을 수행하여야 합니다.

- ✓ 첫번째 서브케이스 (선형정적해석)

프리스트레스를 계산하기 위한 선형정적해석 서브케이스이며, 일반 선형정적해석과 동일한 조건으로 구성됩니다. 즉, 하중조건까지 같이 지정합니다.

- ✓ 두번째 서브케이스 (고유치해석)

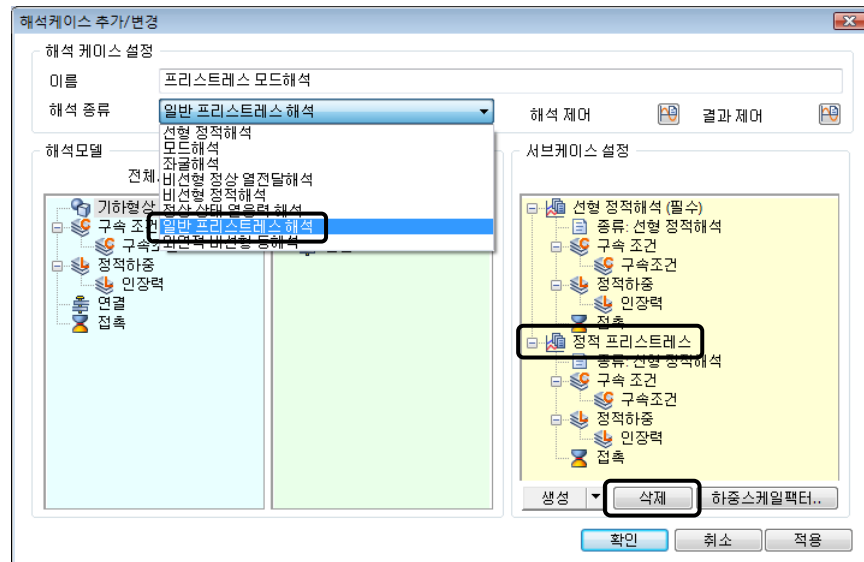
첫번째 서브케이스에서 계산된 프리스트레스를 이용하여 실제 모드해석을 수행하는 서브케

¹ 좌굴과 임계좌굴하중에 대해서는 <좌굴해석> 장에서 상세하게 설명합니다.

입니다. 일반 모드해석과 동일한 해석조건을 가지며, 서브케이스의 <해석제어>에서 모드 해석을 위한 각종 조건을 지정할 수 있습니다.

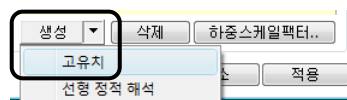
midas NFX의 설계자모드에서 프리스트레스 모드해석을 수행하는 절차를 상세히 정리하면 다음과 같습니다.

- ① 해석모델에 프리스트레스를 계산하기 위한 선형정적해석용 하중조건과 선형정적/모드해석을 위한 경계조건을 지정합니다.¹
- ② 모델 및 해석결과 작업트리에서 <해석케이스>의 마우스 오른쪽 버튼 메뉴 중 <기타>를 선택합니다.
- ③ <해석케이스 추가/변경> 대화상자의 <해석 종류> 목록에서 “일반 프리스트레스 해석”을 선택합니다. (<그림 5> 참고)



<그림 5> 일반 프리스트레스 해석케이스의 작성

- ④ 대화상자 오른쪽의 <서브케이스 설정>에 기본으로 두 개의 선형정적해석 서브케이스가 자동으로 제공되는데, 두번째 “정적 프리스트레스” 서브케이스를 선택한 다음, 하단의 <삭제> 버튼을 클릭하여 이 두번째 서브케이스를 삭제합니다.
- ⑤ <서브케이스 설정> 하단의 <생성> 버튼을 클릭하고, “고유치”를 선택하여 두번째 서브케이스로 모드해석을 위한 고유치해석 케이스를 만듭니다. (<그림 6> 참고)

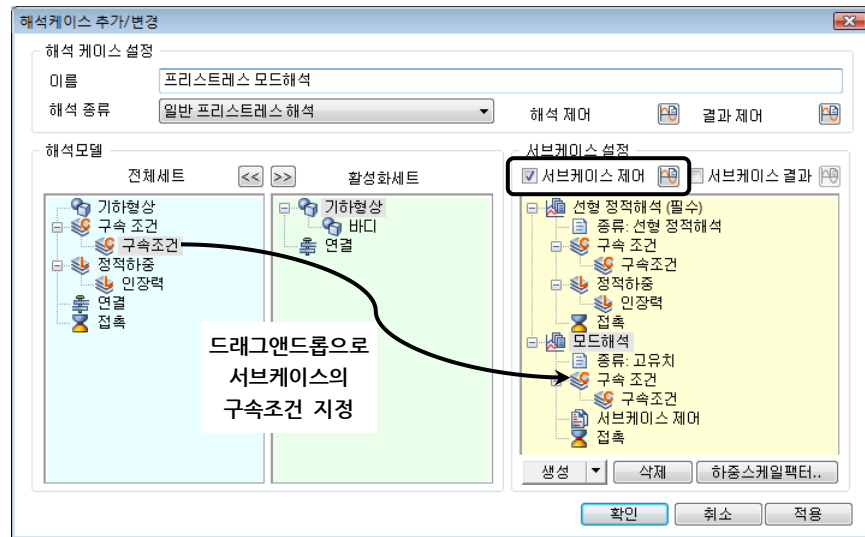


<그림 6> 고유치해석 서브케이스의 작성

- ⑥ <그림 7>과 같이 <해석모델>의 <전체세트>에 있는 “구속조건” 중에서 모드해석에 사용할 구속

¹ 필요한 경우에는 선형정적해석과 모드해석에 다른 경계조건을 사용할 수도 있습니다. 이 경우에는 첫번째와 두번째 서브케이스에서 각 해석을 위한 경계조건을 다르게 지정합니다. (아래의 6 단계 참고)

조건을 선택하고, <서브케이스 설정>에 있는 두번째 모드해석의 “구속조건”으로 드래그앤드롭합니다.

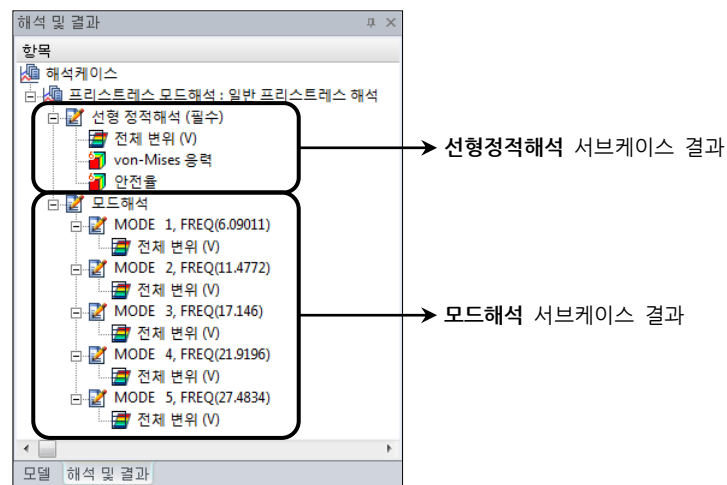


<그림 7> 모드해석 서브케이스의 경계/구속조건 지정

- ⑦ 모드개수 지정 등과 같은 모드해석의 조건 설정이 필요하면, 모드해석 서브케이스를 선택하고 <서브케이스 설정>의 “서브케이스 제어”를 체크합니다. 그리고, 우측의  버튼을 클릭하여 해석제어 조건을 설정/변경합니다. (<그림 7> 참고)
- ⑧ <해석케이스 추가/변경> 대화상자의 <확인> 버튼을 클릭하여, 프리스트레스 모드해석을 위한 해석케이스 정의를 마칩니다.

이렇게 2개의 서브케이스를 정의하면 해석수행시 첫번째 선형정적해석 서브케이스가 수행되고, 그 결과 응력으로부터 프리스트레스 강성이 계산되어 두번째 모드해석을 수행하게 됩니다.

이 과정은 모두 솔버에 의해 자동으로 수행되고, 해석결과로는 첫번째 서브케이스인 선형정적해석 결과와 두번째 서브케이스인 모드해석 결과가 모두 제공됩니다.



<그림 8> 프리스트레스 모드해석의 결과 구성

7. 모드해석의 활용

마지막으로 지금까지 살펴본 모드해석의 다양한 실무활용예를 보다 구체적으로 살펴보도록 하겠습니다.

- ✓ **진동이 발생하는 구조물에 장착되는 부품에 대해 공진을 피하도록 설계합니다.**
가장 기본적이고 중요한 모드해석의 목적/용도로, 부품의 모드해석을 수행하여 부품의 고유진동수를 계산한 후, 구조물의 작동주파수 또는 작용하중의 주파수와 비교하여 공진 등에 대한 동적거동의 안정성을 파악하고 설계에 반영합니다.
특히, 이 공진발생 여부의 검토는 조화가진을 받는, 즉 일정한 주파수의 진동이 반복적으로 작용하는 구조물(예, 회전체 등)에서 대단히 중요합니다.
- ✓ **시스템의 운영 진동수에서의 변형형상을 파악하여 원하는 변형을 유도합니다.**
모드형상(변형형상)이 취약부에 영향을 미치지 않도록 하거나, 반대로 음향기기 같은 제품에서는 운영진동수에서 원하는 동적변형이 발생하도록 유도합니다.
즉, 두번째 음향기기의 경우는 고유진동수와 시스템의 운영진동수를 의도적으로 일치시켜서 진동을 활용하는 예이며, 고유진동수 뿐만 아니라 모드형상도 중요합니다.
- ✓ **과도응답해석, 주파수응답해석에서 기본 데이터로 활용합니다.**
과도응답해석, 주파수응답해석 등의 동해석에서 모드법(modal method) 기반으로 해석할 때 고유진동수와 모드형상 결과를 기본데이터로 활용합니다.
또한, 모드해석 결과를 검토하여 과도응답해석에서 시간스텝을 계산하고, 주파수응답해석에서는 해석을 수행할 관심 주파수 영역을 판단할 수 있습니다.
과도응답해석/주파수응답해석에서의 모드해석 결과의 활용에 대해서는 추후 과도응답해석/주파수응답해석의 모드법에 대한 설명에서 보다 상세하게 설명하도록 하겠습니다.
- ✓ **복잡한 모델링에 대한 절점 연결상태 확인시 유용합니다.**
파트가 많거나 복잡도가 높은 모델링을 진행한 후 원하는 해석을 수행하기 전에 간략히 모드해석을 수행하여 모드 차수별 거동상태를 확인하면, 절점 공유상태나 접촉조건이 적절하게 모델링 되었는지 확인하는 데에도 유용하게 활용할 수 있습니다.