5.5 비선형 유한요소 해법

비선형 유한요소 해법은 반복계산의 누적 증분해(incremental solution)가 정해에 수렴하도록 하는 방법이며 그림 5.5.1에서 그려진 바와 같이 진행된다.

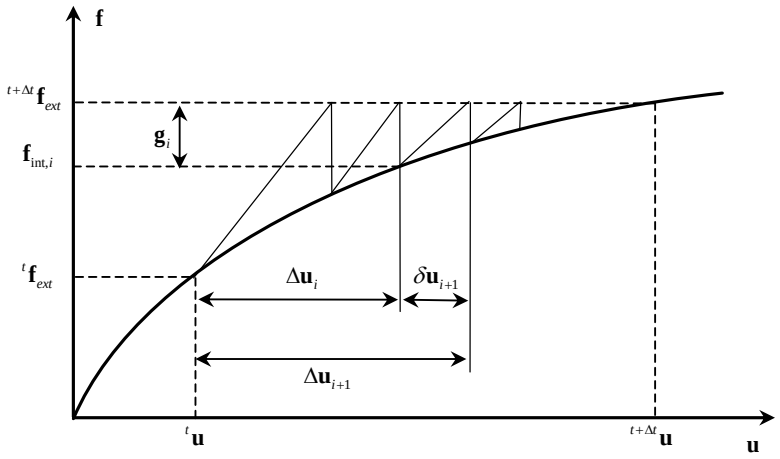

그림 5.5.1 누적 증분해와 비선형 유한요소법의 수렴 과정

그림에서, $^{t}\mathbf{f}_{ext}$ 와 $^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{ext}$ 는 각각 시간 t 와 시간 $t+\Delta t$ 에서의 외력을 의미하고, 시간 t 와 시간 $t+\Delta t$ 사이에서의 해와 증분해는 다음과 같은 관계로 표시될 수 있다.

$$^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^{t}\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} \tag{5.5.1}$$

$\Delta\mathbf{u}$: 시간 증분 Δt 사이에 발생하는 증분해

시간 증분 Δt 구간에서 비선형 해석을 위한 반복계산이 이루어지면 증분해의 누적은 다음과 같다.

$$\Delta\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n}\delta\mathbf{u}_i \quad \text{or} \quad \Delta\mathbf{u}_{i+1} = \Delta\mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u}_{i+1} \tag{5.5.2}$$

$\Delta\mathbf{u}_i$: i 번째 반복계산까지 발생한 누적 증분해

$\delta\mathbf{u}_{i+1}$: $i+1$ 번째 반복계산에서 발생한 증분해

$\delta\mathbf{u}_{i+1}$ 는 접선강성행렬 (tangential stiffness matrix) $\mathbf{K}_{i+1}$ 을 사용하여 다음과 같이

선형 연립방정식을 통해 계산된다.

$$\delta \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{K}_{i+1}^{-1} \mathbf{g}_i \tag{5.5.3}$$

$\mathbf{g}_i$: 불평형력 (residual force, unbalance force)

불평형력 $\mathbf{g}_i$ 는 다음과 같이 외력 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{ext}$ 과 내력 $\mathbf{f}_{int,i}$ 의 차이로 표현된다.

$$\mathbf{g}_i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int,i} \tag{5.5.4}$$

반복계산 과정 (5.5.2)-(5.5.4)는 사용자가 지정한 수렴조건(convergence criteria)을 만족할 때까지 반복되며, 수렴조건은 부재력, 변위 또는 에너지 등의 변화량으로 판단한다.

• 선탐색 (Line search)

midas NFX에서는 위에 설명된 기본적인 반복해법의 성능 향상을 위하여 선탐색 기능을 제공한다. 선탐색의 기본적인 개념은 (5.5.3)에서 계산된 증분해 $\delta \mathbf{u}_{i+1}$ 를 누적 증분해에 더하는 과정에서, 스칼라 값 η 를 도입하여 정확도를 향상시키는 데 있다. 이러한 경우 누적 증분해는 다음과 같은 방식으로 계산된다.

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \eta \delta \mathbf{u}_{i+1} \tag{5.5.5}$$

위 식에서 계산된 $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ 가 평형상태를 만족한다고 가정했을 경우, 평형상태에서 총 포텐셜 에너지가 고정된다는 원리(principal of stationary total potential energy)을 이용하면, 선탐색 문제는 총 포텐셜 에너지의 η 에 대한 미분값이 0 이 되는 η 를 찾는 문제로 귀결된다.

$$s(\eta) = \delta \mathbf{u}_{i+1}^{T} \mathbf{g}(\eta) = 0 \tag{5.5.6}$$

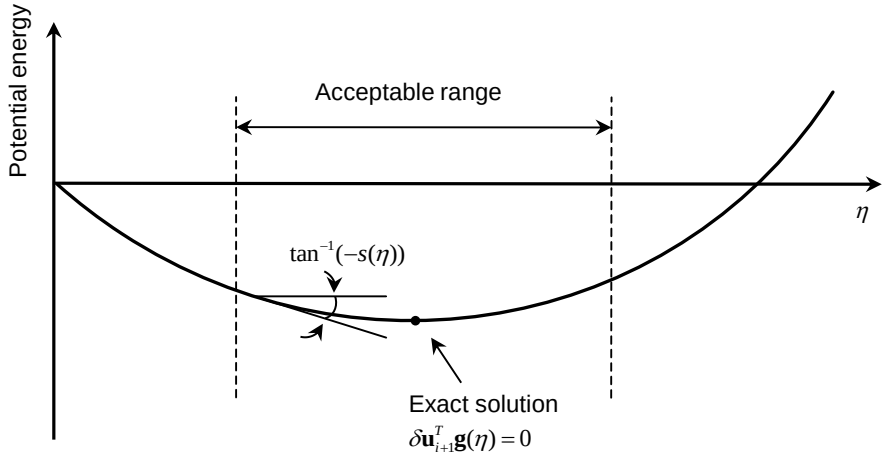

그림 5.5.2 선탐색 알고리즘의 개념도

에너지의 미분값 $s(\eta)$가 η에 대해 선형으로 변한다고 가정했을 때, (5.5.6)을 만족하는 η는 다음과 같이 계산된다.

$$\eta_2 = \frac{-s(\eta=0)}{s(\eta=1)-s(\eta=0)} \tag{5.5.7}$$

여기서 η가 0인 경우와 1인 경우의 기울기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} s(\eta=0) &= \delta\mathbf{u}_{i+1}{}^T\mathbf{g}_i \\ s(\eta=1) &= \delta\mathbf{u}_{i+1}{}^T\mathbf{g}_{i+1} \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

실제로 선탐색 알고리즘을 위해 가정한 것들이 정확히 만족되지 않기 때문에, (5.5.7)에 의해 계산된 $s(\eta)$는 일반적으로 0이 아니다. midas NFX에서는 $s(\eta_j)/s(\eta=0)$ 값이 사용자가 지정한 일정 값 미만으로 계산될 때까지 반복적으로 위에서 설명된 절차가 적용된다.

• 초기 강성법(Initial stiffness), 뉴튼 랩슨법(Newton Raphson), 수정(Modified) 뉴튼 랩슨법

비선형해석에서의 반복법은 접선강성의 계산 시점에 따라 초기 강성법, 뉴튼 랩슨법, 수정 뉴튼 랩슨법 등으로 분류할 수 있다. 초기 강성법에서는 해석 시작 시점에서 계산된 접선강성을 계속 유지하고, 뉴튼 랩슨법에서는 매 반복 계산마다 접선강성을 재계산하며, 수정 뉴튼 랩슨법은 외력의 변화가 발생하는 시점에서 접선강성을 계산한다. 접선강성행렬의 계산 및 행렬분해는 많은 계산시간을 요구하므로 초기 강성법과 수정 뉴튼 랩슨 법을 활용할 경우, 수렴 과정에 문제가 발생하지 않는다면 뉴튼 랩슨 법에 비해 빠른 계산 속도를 얻을 수 있다. midas NFX에서는 초기 강성법 또는 뉴튼 랩슨법 등을 명시적으로 구분하지 않고, 접선강성의 재계산 시점을 정의함으로써 모든 반복법의 효과를 얻을 수 있다.

• 자동 강성행렬 재계산

해석하고자 하는 모델의 비선형 정도, 수렴해의 평탄함 정도 등 해당 문제 특징에 따라 적절한 접선강성의 계산 시점을 선택하는 것이 중요하다. midas NFX에서는 비선형 유한요소 해법으로 해당 비선형 문제의 특징, 즉 반복계산시의 수렴특징, 발산여부 등을 종합적으로 판단하여 적절한 시점에 강성행렬을 재계산하는 자동 강성행렬 재계산 방법(automatic tangential stiffness update)을 제공한다. 기본적으로 다음과 같은 몇 가지 조건이 만족되는 경우 강성행렬 재계산이 수행된다.

► 사용자가 지정한 최대 반복계산 횟수보다 예상되는 반복계산 횟수가 많은 경우

► 해가 발산하는 것으로 판정된 경우

• 수렴조건, 발산 판정 및 하중 이등분(Load bisection)

반복법에서 해의 수렴여부는 부재력 기준(force norm), 변위기준(displacement norm), 그리고 에너지 기준(energy norm) 으로 판정한다.

$$\text{Force norm ratio} = \frac{\sqrt{\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i}}{\sqrt{\Delta\mathbf{f}_{\text{int},i}^T \Delta\mathbf{f}_{\text{int},i}}} \tag{5.5.9}$$

$$\text{Displacement norm ratio} = \frac{\sqrt{\delta\mathbf{u}_i^T \delta\mathbf{u}_i}}{\sqrt{\Delta\mathbf{u}_i^T \Delta\mathbf{u}_i}} \tag{5.5.10}$$

$$\text{Energy magnitude ratio} = \left| \frac{\delta\mathbf{u}_i^T \mathbf{g}_i}{\Delta\mathbf{u}_i^T \Delta\mathbf{f}_{\text{int},i}} \right| \tag{5.5.11}$$

midas NFX에서는 이 세 가지 기준 중 하나 또는 다수의 기준에 대하여 사용자가 제공하는 허용치와의 비교를 통해 수렴여부를 판단한다.

• 발산 판정 및 하중단계 이등분

해의 발산 여부는 자동 강성행렬 재계산 방법에서 중요한 기준으로 사용되며, 발산율(divergence rate) E_i 을 기초로 결정한다.

$$E_i = \frac{\delta\mathbf{u}_i^T \mathbf{g}_i}{\delta\mathbf{u}_i^T \mathbf{g}_{i-1}} \tag{5.5.12}$$

발산율의 절대값이 1보다 큰 경우($|E_i| \geq 1$), 비선형해석의 해는 발산의 위험이 있다고 판단할 수 있으며, 강성행렬 재계산 또는 하중 이등분 등의 알고리즘 상 필요한 조치가 취해진다.

하중 이등분은 해가 발산하거나 수렴을 위한 반복계산 수가 사용자가 지정한 최대 횟수보다 많아지는 등, 현재 하중단계의 증분이 수렴해를 얻기에 너무 크다고 판정되는 경우에 적용된다. 기존 하중 증분을 이등분하여 반복계산을 재시작함으로써, 부적절한 하중 증분 크기에 대해 유연하게 대처할 수 있다. midas NFX에서는 사용자가 지정하는 최대 이등분 단계(maximum bisection level)에 도달할 때까지 필요에 따라 하중 이등분 자동 수행하게 된다.

• 시간 증분 자동조절

비선형 해석의 효율성을 증가시키기 위하여, midas NFX에는 시간 증분의 크기를 비선형해석의 수렴성을 기초로 자동 조절하는 기능을 포함한다. 기본이 되는 시간 증분 크기와 최대 증분 크기는 사용자의 입력에 의하여 결정된다. 비선형 해석에서 시간증분 자동 조절 기능을 사용할 경우, 이전 증분단계에서 수렴하는데 필요로 하는 반복계산 횟수를 기초로 다음 단계의 시간 증분크기는 증가 또는

감소된다.

$$\Delta t^{i+1} = n_s \, \Delta t^i \qquad (1 \le n_s \le n_{s,\max}) \tag{5.5.13}$$

여기서 증분 조정계수 (n_s)는 자연수로 국한시킴으로써 사용자가 의도한 시점 또는 하중 크기에서 비선형 해를 최대한 얻을 수 있도록 하였다. 증분 조정계수는 초기 증분량을 의미하는 1을 최소로, 사용자가 제공하는 값($n_{s,\max}$)을 최대로 하는 범위를 갖는다.