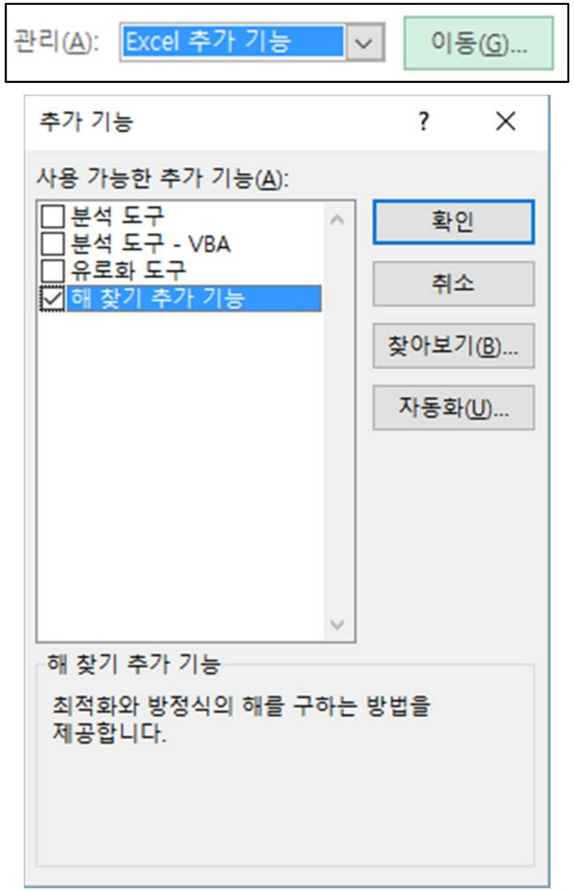
Optimization Using Microsoft Excel "Solver"

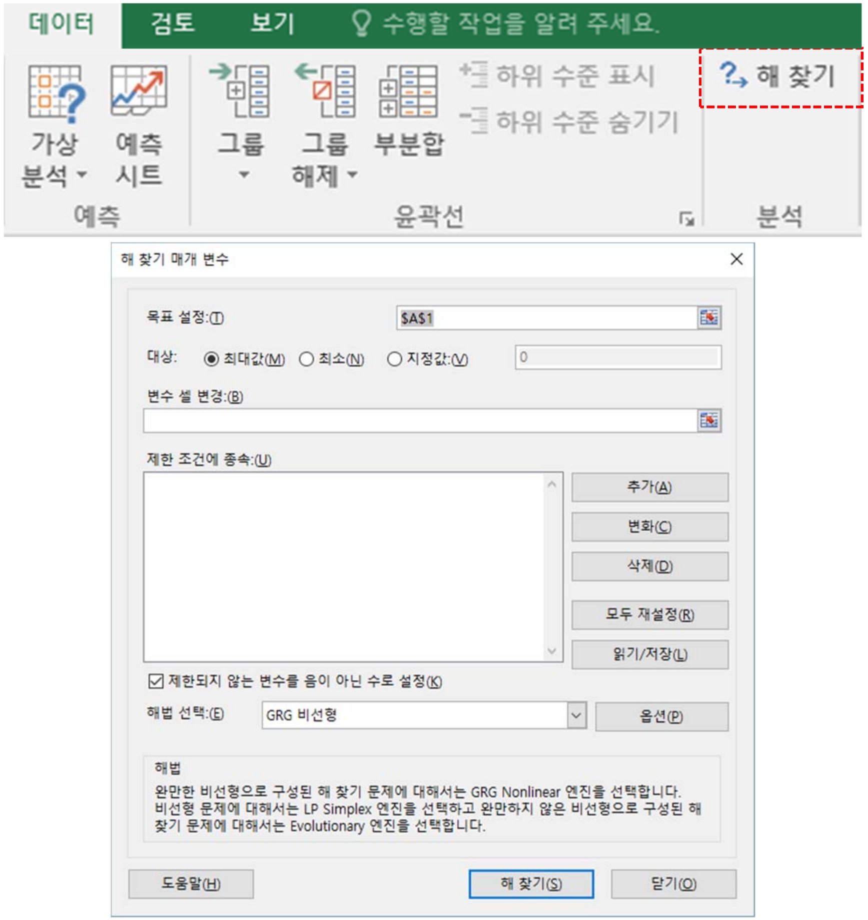
Microsoft Office Excel 2016

Seungjae Min
Department of Automotive Engineering
Hanyang University

해찾기 (Solver) 설치

- “옵션 → 추가기능” 메뉴를 선택하여 “해찾기 추가 기능”을 선택
- “데이터 → 분석” 메뉴에 “해 찾기” 메뉴가 등록됨





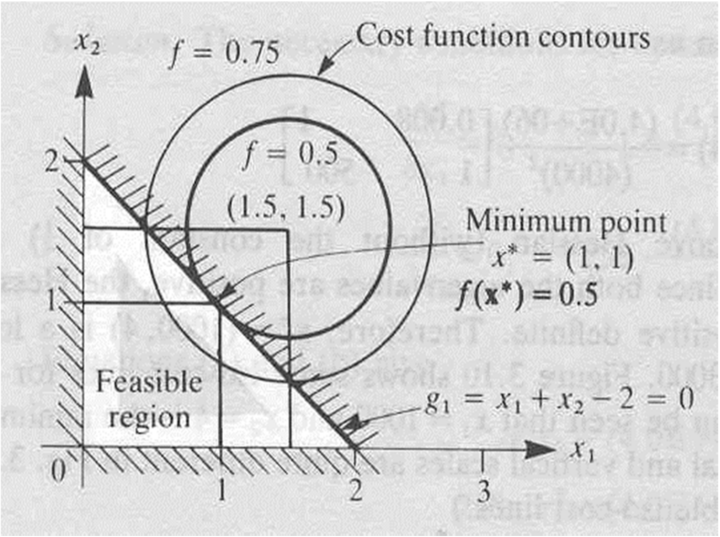
Algorithm (Microsoft Excel 도움말 참조)

- Nonlinear Problems
  - Microsoft Excel 해 찾기에는 Leon Lasdon(Austin의 Texas대학)과 Allan Waren(Cleveland 주립 대학)이 개발한 비선형 최적 코드 Generalized Reduced Gradient(GRG2)가 사용됩니다.
- Linear Problems
  - 선형과 정수 문제는 변수 경계를 사용하는 간단한 방법(Simplex Method)과 John Watson과 Dan Fylstra(Frontline Systems, Inc)가 개발한 분기와 경계법(Branch and Bound Method)이 사용됩니다.
- Non-smooth Problems
  - Frontline Systems에서 개발한 다양한 genetic algorithm과 local search 기법을 포함한 Evolutionary Solving Method가 사용됩니다.
- 해 찾기에 사용되는 내부 해결 과정에 대한 자세한 정보
  - Frontline Systems, Inc.
    P.O. Box 4288
    Incline Village, NV 89450-4288
    (775) 831-0300, info@solver.com, http://www.solver.com

데이터 → 해 찾기(Solver)

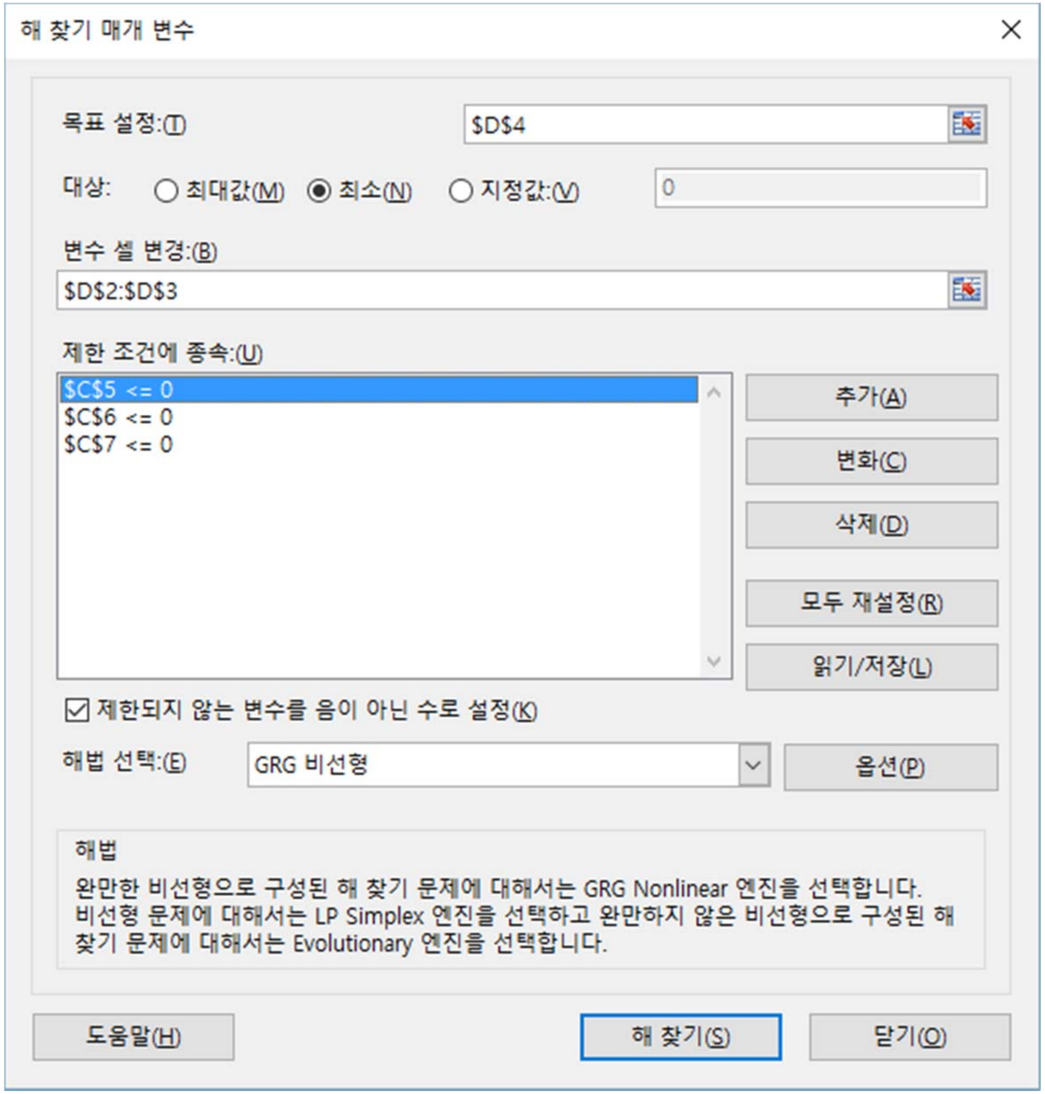
- 예제

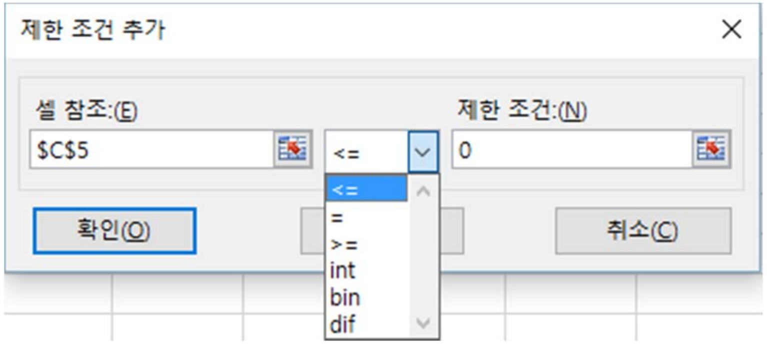
$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2 \\
\text{subject to} \quad & g_1(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0 \\
& g_2(\boldsymbol{x}) = -x_1 \le 0 \\
& g_3(\boldsymbol{x}) = -x_2 \le 0
\end{aligned}
$$

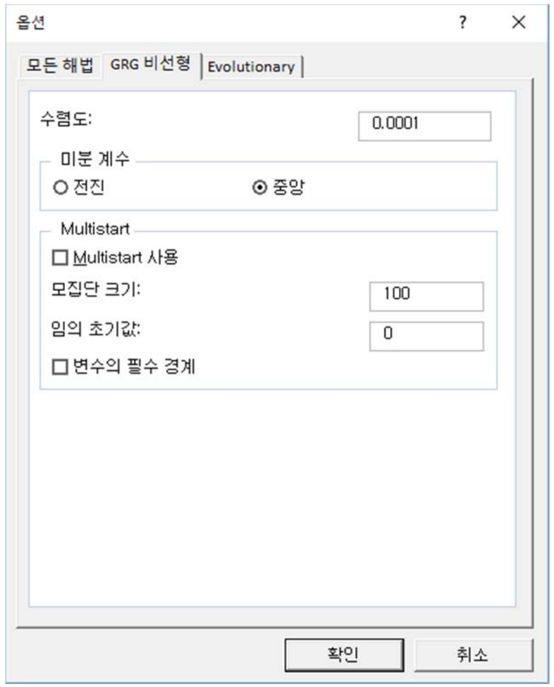


	A	B	C	D
1			initial	optimum
2	design variables	x1	0	
3		x2	0	
4	objective function	f	=(C2-1.5)^2+(C3-1.5)^2	
5	constraints	g1	=C2+C3-2	
6		g2	=-C2	
7		g3	=-C3	

최적설계문제 설정


해 찾기 매개 변수
목표 설정:(T)
$D$4
대상:
최대값(M)
최소(N)
지정값:(V)
0
변수 셀 변경:(B)
$D$2:$D$3
제한 조건에 종속:(U)
$C$5 <= 0
$C$6 <= 0
$C$7 <= 0
추가(A)
변화(C)
삭제(D)
모두 재설정(R)
읽기/저장(L)
제한되지 않는 변수를 음이 아닌 수로 설정(K)
해법 선택:(E)
GRG 비선형
옵션(P)
해법
완만한 비선형으로 구성된 해 찾기 문제에 대해서는 GRG Nonlinear 엔진을 선택합니다. 비선형 문제에 대해서는 LP Simplex 엔진을 선택하고 완만하지 않은 비선형으로 구성된 해 찾기 문제에 대해서는 Evolutionary 엔진을 선택합니다.
도움말(H)
해 찾기(S)
닫기(O)

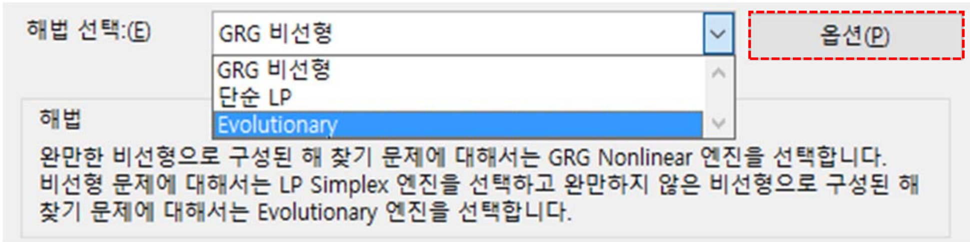

제한 조건 추가
셀 참조:(E)
제한 조건:(N)
$C$5
<=
0
<=
=
>=
int
bin
dif
확인(O)
취소(C)

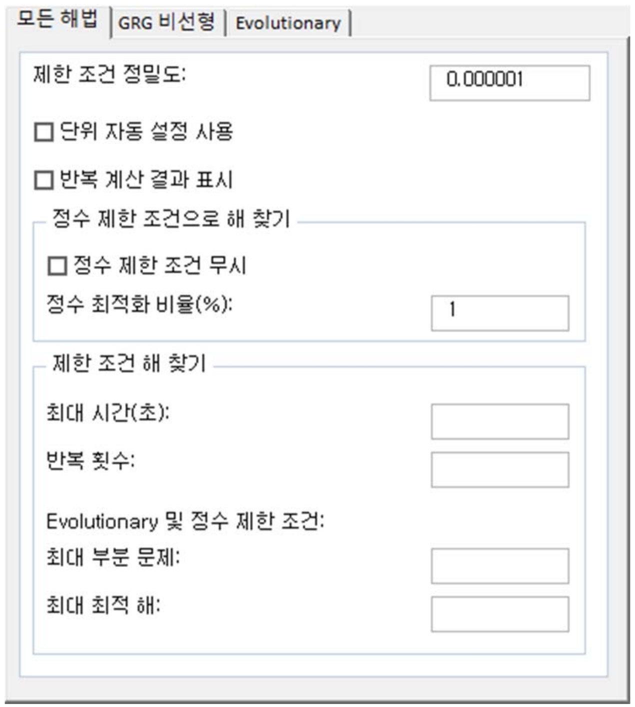

옵션
모든 해법
GRG 비선형
Evolutionary
수렴도:
0.0001
미분 계수
전진
중앙
Multistart
Multistart 사용
모집단 크기:
100
임의 초기값:
0
변수의 필수 경계
확인
취소

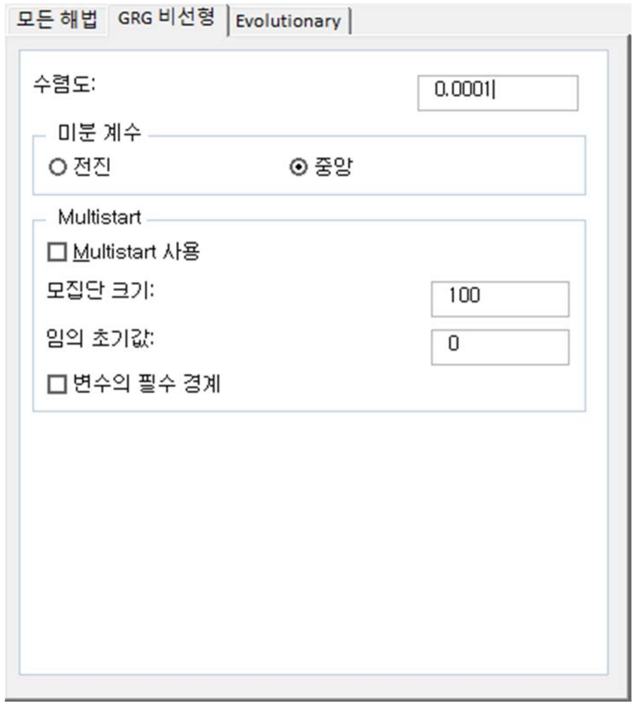
Some Common Sources of Problems

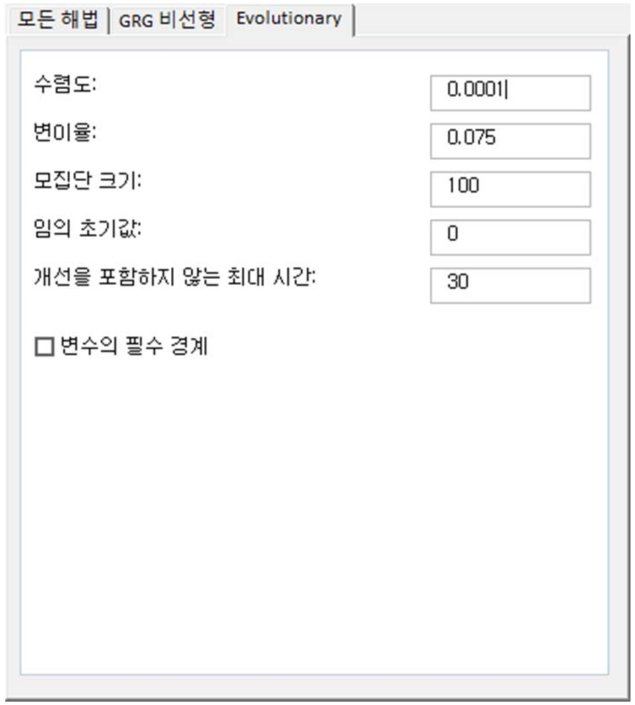
- Time or iteration limit was reached
- Precision is too large
- Convergence to the solution is too slow
- Model is poorly scaled
- Choice of initial solution is inadequate
- Solution was affected by limitations on finite precision compter arithmetic
- Solution is right and your expectation is wrong

Solver Options









해찾기 옵션 (1)

- 제한되지 않은 변수를 음이 아닌 수로 설정
  - 제한 조건 추가 대화 상자의 제한 조건 상자에 하한값을 설정하지 않은 모든 변경 가능한 셀의 하한값을 0으로 가정
- 정밀도: 0과 1 사이의 소수
  - 제한 조건 셀 값이 목표와 일치하는지, 상한이나 하한값을 만족시키는지 값의 정밀도를 제어, 0.0001이 0.01보다 정밀도가 높음
- 단위 자동 설정
  - 입력값과 출력값의 크기가 많이 다를 때(예, 수백 만 달러의 투자액으로 수익율을 최대화) 이 옵션을 선택
- 반복 계산 결과 표시
  - 해 찾기의 중간 과정을 표시
- 최대 계산 시간
  - 문제를 해결하는 데 걸리는 시간을 제한
- 최대 계산 횟수
  - 계산 횟수를 제한하여 문제를 해결하는 데 걸리는 시간을 제한

해찾기 옵션 (2)

- 정수 최적화 비율: [정수 제한 조건이 있는 문제]
  - 목표 셀에 대해 허용되는 참인 최적 해와의 차이의 비율(백분율), 허용 한도가 높을 수록 해결 속도가 빠름
- 수렴도: 0과 1 사이의 소수 [비선형문제]
  - 마지막 5개의 반복 계산에 대해 목표 셀에서 바꾼 값이 수렴도 상자에 지정한 숫자보다 작으면 해 찾기가 중단, 수렴도 값이 작을수록 해를 찾는 시간이 오래 걸림
- 미분 계수: 목적 함수와 제한 조건 함수의 편미분 계수를 추정할 때 차이를 지정
  - 전진: 제한 조건 값이 완만하게 변하는 문제에 사용
  - 중앙: 한계 가까이에서 제한 조건이 급격히 변하는 문제에 사용, 더 많은 계산을 해야 하지만 해를 개선할 수 없다는 메시지가 나타날 때 사용
- Multistart 사용: 전역최적해를 얻기 위해 다수 포인트에서 최적화 수행
  - 모집단 크기: 최적화를 수행할 포인트 개수 (최소값 10, 최대값 200)
  - 임의 초기값: 최적화의 초기값 설정 (설정하지 않은 경우 임의값 선택)

해찾기 옵션 (3)

- 변이율: 0과 1 사이의 소수
  - Generation이 진행됨에 따라 변이가 진행될 확률
- 모집단 크기: 10과 200 사이의 정수
  - Generation이 진행될 포인트 개수
- 임의 초기값: 0과 1 사이의 실수
  - Generation의 초기 수행 위치(초기값)
- 개선을 포함하지 않는 최대 시간
  - 최적화 과정에서 목적 함수의 개선이 없을 시 수렴할 최소 시간

보고서 (1)

- 해답
  - 목표 셀과 변경할 셀을 원래 값과 최종 결과값, 제한 조건 및 제한 조건에 대한 정보로 나타냅니다.
- 민감도
  - **해 찾기 모델 설정** 대화 상자의 **목표 셀** 상자에 있는 수식이나 제한 조건을 바꾸면 해가 어떻게 변하는지에 대한 정보를 나타냅니다.
  - 정수 제한 조건이 있는 모델이면 이 보고서를 만들 수 없습니다.
  - 비선형 모델에 대한 보고서에는 한계 기울기와 라그랑지(Lagrange) 승수가 제공되며
  - 선형 모델에 대한 보고서에는 한계 비용, 잠재 가격, 허용 증가값과 감소값이 있는 목표 셀 계수, 제한 조건의 오른쪽 범위 등이 나타납니다.
- 한계값
  - 목표 셀과 변경할 셀의 값을 상한값, 하한값, 목표값 등과 함께 나열합니다.
  - 정수 제한 조건이 있는 모델이면 이 보고서를 만들 수 없습니다.
  - 하한값은 변경할 다른 모든 셀을 고정해도 제한 조건을 만족할 때 셀이 가질 수 있는 가장 작은 값이고 상한값은 가장 큰 값입니다.

보고서 (2)

해 찾기 결과

해를 찾았습니다. 모든 제한 조건 및 최적화 조건이 만족되었습니다.

보고서: 해답 / 우편물 종류 / 한계값

◉ 해 찾기 해 보존
○ 원래 값 복원

☐ 해 찾기 매개 변수 대화 상자로 돌아가기　☐ 개요 보고서

확인　취소　시나리오 저장…

해를 찾았습니다. 모든 제한 조건 및 최적화 조건이 만족되었습니다.

GRG 엔진을 사용하는 경우 최소한 로컬에 최적화된 해를 발견했습니다. 단순 LP를 사용하는 경우에는 전역에 최적화된 해를 발견했음을 의미합니다.

	A	B	C	D
1			initial	optimum
2	design variables	x1	0	1
3		x2	0	1
4	objective function	f	4.5	0.5
5	constraints	g1	-2	0
6		g2	0	-1
7		g3	0	-1

Microsoft Excel 16.0 해답 보고서
워크시트 이름: [통합 문서1]Sheet1
보고서 작성일: 2017-09-29 오후 8:49:27
결과: 해를 찾았습니다. 모든 제한 조건 및 최적화 조건이 만족되었습니다.
해 찾기 엔진
엔진: GRG 비선형
해 찾는 시간: 2.75 초.
반복 횟수: 2 부분 문제: 0
해 찾기 옵션
최대 시간 제한 없음, 반복 횟수 제한 없음, Precision 0.000001, 반복 계산 결과 표시
수렴도 0.0001, 모집단 크기 100, 임의 조기값 0, 미분 계수 중앙
최대 부분 문제 제한 없음, 최대 정수 해 제한 없음, 정수 허용 한도 1%

목표 셀 (최소)

셀	이름	계산 전의 값	계산 값
$D$4	f optimum	4.5	0.5

변수 셀

셀	이름	계산 전의 값	계산 값	정수
$D$2	x1 optimum	0	1	Contin
$D$3	x2 optimum	0	1	Contin

제한 조건

셀	이름	셀의 값	수식	상태	조건과의 차
$D$5	g1 optimum	0	$D$5<=0	만족	0
$D$6	g2 optimum	-1	$D$6<=0	부분적 만족	1
$D$7	g3 optimum	-1	$D$7<=0	부분적 만족	1

Microsoft Excel 16.0 민감도 보고서
워크시트 이름: [통합 문서1]Sheet1
보고서 작성일: 2017-09-29 오후 8:49:27

변수 셀

셀	이름	계산 값	한계 기울기
$D$2	x1 optimum	1	0
$D$3	x2 optimum	1	0

제한 조건

셀	이름	계산 값	라그랑지 승수
$D$5	g1 optimum	0	-1
$D$6	g2 optimum	-1	0
$D$7	g3 optimum	-1	0

Microsoft Excel 16.0 한계값 보고서
워크시트 이름: [통합 문서1]Sheet1
보고서 작성일: 2017-09-29 오후 8:49:27

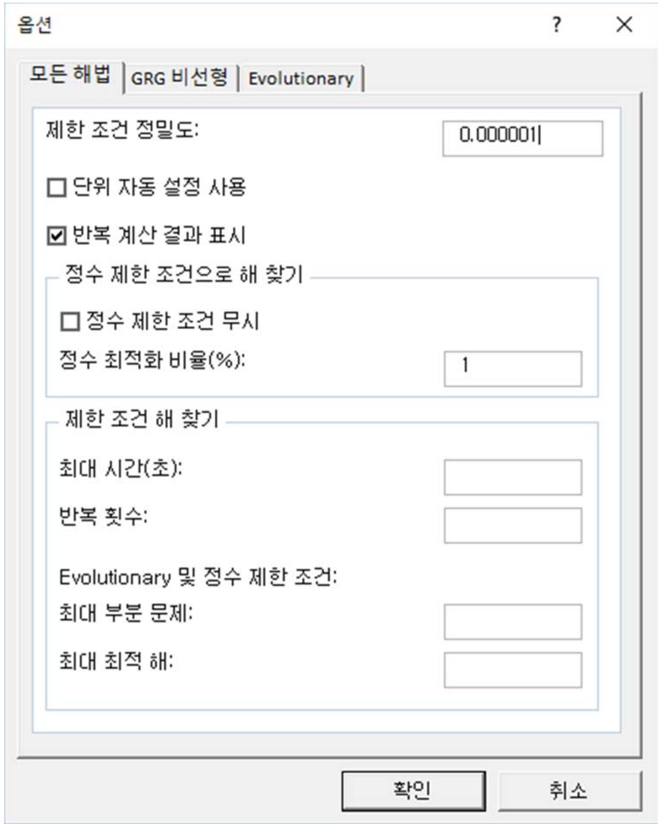
목표 셀

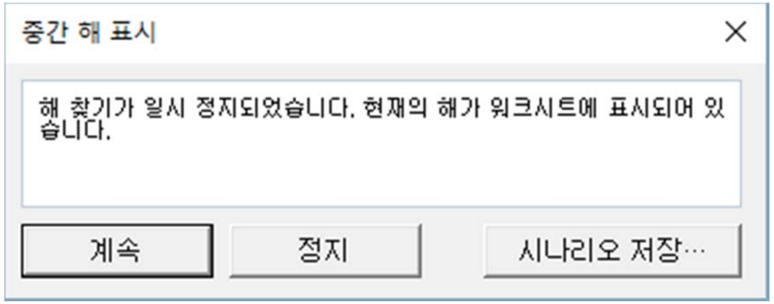
셀	이름	값
D	f opti	1

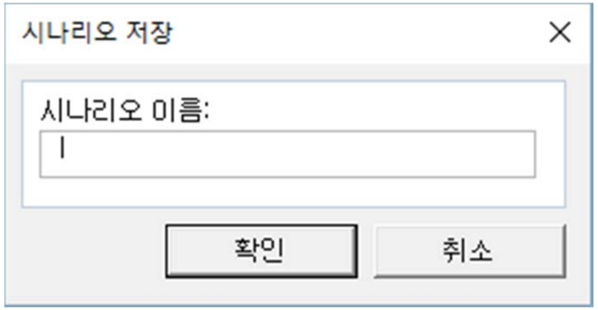
변수 셀	이름	값	하한값 한계값	목표 셀 결과	상한값 한계값	목표 셀 결과
D	x1 op	1	0	2.5	1	0.5
D	x2 op	1	0	2.5	1	0.5

중간결과 보기

- 설계변수 및 목적함수 값의 수렴상황을 저장
- 매 **iteration**을 시나리오로 저장한 후, 도구 > 시나리오 를 통하여 요약시트 생성

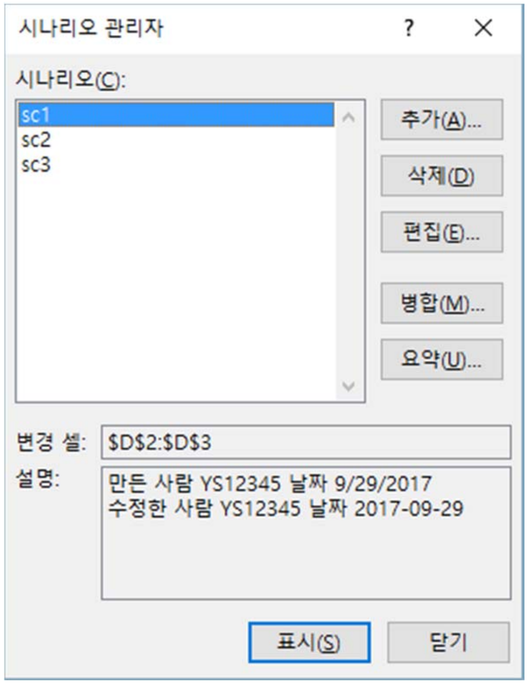


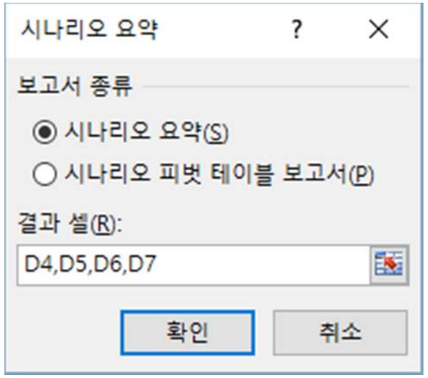




시나리오: 최적화 과정 확인

- "데이터 → 예측" 메뉴에서 "가상 분석 → 시나리오 관리자" 이용





시나리오 요약

	현재 값:	s1	sc2	sc3
변경 셀:				
$D$2	1	0	1	1
$D$3	1	0	1	1
결과 셀:				
$D$4	0.5	4.5	0.5	0.5
$D$5	0	-2	0	0
$D$6	-1	0	-1	-1
$D$7	-1	0	-1	-1

참고: 현재 값 열은 시나리오 요약 보고서가 작성될 때의 변경 셀 값을 나타냅니다. 각 시나리오의 변경 셀들은 회색으로 표시됩니다.

Test Problems: Unconstrained (1)

- A quadratic function: $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2$

  $x^{(0)} = [0 \quad 0]^T, \left\langle x^* = [1 \quad 3]^T \right\rangle$

- Rosenbrock's parabolic valley: $f(x_1, x_2) = 100\left(x_2 - x_1^{\,2}\right)^2 + (1 - x_1)^2$

  $x^{(0)} = [-1.2 \quad 1.0]^T, \left\langle x^* = [1 \quad 1]^T \right\rangle$

- Beal's function: $f(x_1, x_2) = \left[1.5 - x_1(1 - x_2)\right]^2 + \left[2.25 - x_1\left(1 - x_2^{\,2}\right)\right]^2 + \left[2.625 - x_1\left(1 - x_2^{\,3}\right)\right]^2$

  $x^{(0)} = [1 \quad 1]^T, \left\langle x^* = [3 \quad 0.5]^T \right\rangle$

- Powell's quartic function:

  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$

  $x^{(0)} = [3 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T, \left\langle x^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \right\rangle$

Test Problems: Unconstrained (2)

- Wood's function:

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\left[10\left(x_2-x_1^{\ 2}\right)\right]^2+\left(1-x_1\right)^2+90\left(x_4-x_3^{\ 2}\right)^2+\left(1-x_3\right)^2+10\left(x_2+x_4-2\right)^2+0.1\left(x_2-x_4\right)$$

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}-3 & -1 & -3 & -1\end{bmatrix}^T,\left\langle x^*=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\rangle$$

- Freudenstein and Roth function:

$$f\left(x_1,x_2\right)=\left\{-13+x_1+\left[\left(5-x_2\right)x_2-2\right]x_2\right\}^2+\left\{-29+x_1+\left[\left(x_1+1\right)x_2-14\right]x_2\right\}^2$$

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}0.5 & -2\end{bmatrix}^T,\left\langle x^*=\begin{bmatrix}5 & 4\end{bmatrix}^T\right\rangle$$

- A nonlinear function of three variables:

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\frac{1}{1+\left(x_1-x_2\right)^2}+\sin\left(\frac{1}{2}\pi x_2 x_3\right)+\exp\left[-\left(\frac{x_1+x_3}{x_2}-2\right)^2\right]$$

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}^T,\left\langle x^*=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\rangle$$

Test Problems: Unconstrained (3)

- Fletcher and Powell's helical valley:

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=100\left\{\left[x_3-10\theta\left(x_1,x_2\right)\right]^2+\left[\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}-1\right]^2\right\}+x_3^{\ 2}$$

$$where \quad 2\pi\theta\left(x_1,x_2\right)=\begin{cases} arctan\dfrac{x_2}{x_1} & \text{if } x_1>0 \\ \pi+arctan\dfrac{x_2}{x_1} & \text{if } x_1<0 \end{cases}$$

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,\left\langle x^*=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right\rangle$$

- Powell's badly scaled function:

$$f\left(x_1,x_2\right)=\left(10000x_1x_2-1\right)^2+\left[\exp\left(-x_1\right)+\exp\left(-x_2\right)-1.0001\right]^2$$

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T,\left\langle x^*=\begin{bmatrix}1.098\times10^{-5} & 9.106\end{bmatrix}^T\right\rangle$$

- Brown's badly scaled function:

$$f\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1-10^6\right)^2+\left(x_2-2\times10^{-6}\right)^2+\left(x_1x_2-2\right)^2$$

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T,\left\langle x^*=\begin{bmatrix}10^6 & 2\times10^{-6}\end{bmatrix}^T\right\rangle$$

Test Problems: Constrained (1)

- Rosen-Suzuki

$$\text{Minimize } f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4 + 100$$

$$\text{subjet to } g_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8 \le 0$$

$$g_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 - 10 \le 0$$

$$g_3 = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4 - 5 \le 0$$

$$-100 \le x_i \le 100$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$$

$$x^* = (-0.18, 0.93, 1.86, -1.16),\ f^* = +53.7,\ \text{activeset} = \{1, 3\}$$

Test Problems: Constrained (2)

- Betts, J.T., An accelerated Multiplier Method for Nonlinear Programming, *J. of Optimization Theory and Applications*, Vol.2, No.2, Feb. 1977

$$\text{Minimize } f = (x_1 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^4 + (x_5 - 1)^6$$

$$\text{subjet to } h_1 = x_4 x_1^{\,2} + \sin(x_4 - x_5) - 2\sqrt{2} = 0$$

$$h_2 = x_2 + x_3^{\,4} x_4^{\,2} - 8 - \sqrt{2} = 0$$

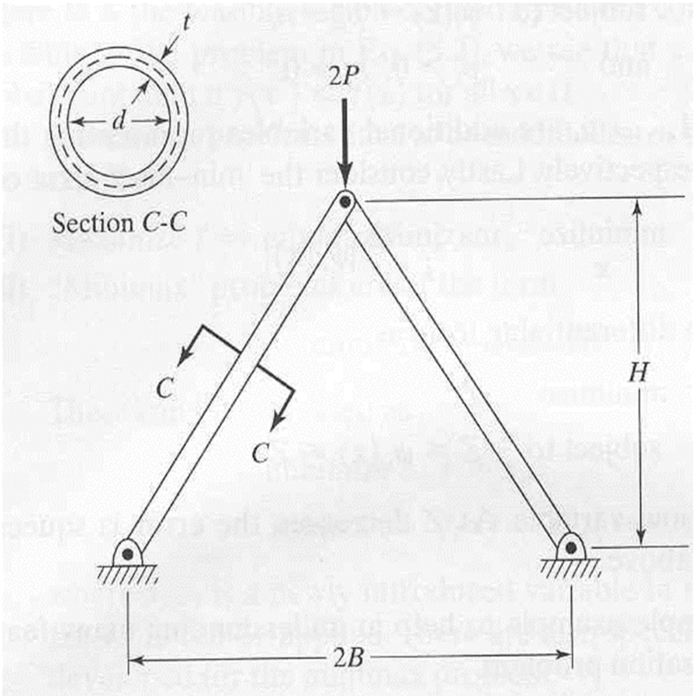
$$-10 \le x_i \le 10$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$x^* = (1.166, 1.182, 1.380, 1.506, 0.610), \quad f^* = 0.24$$

Example: Two-bar planar truss design

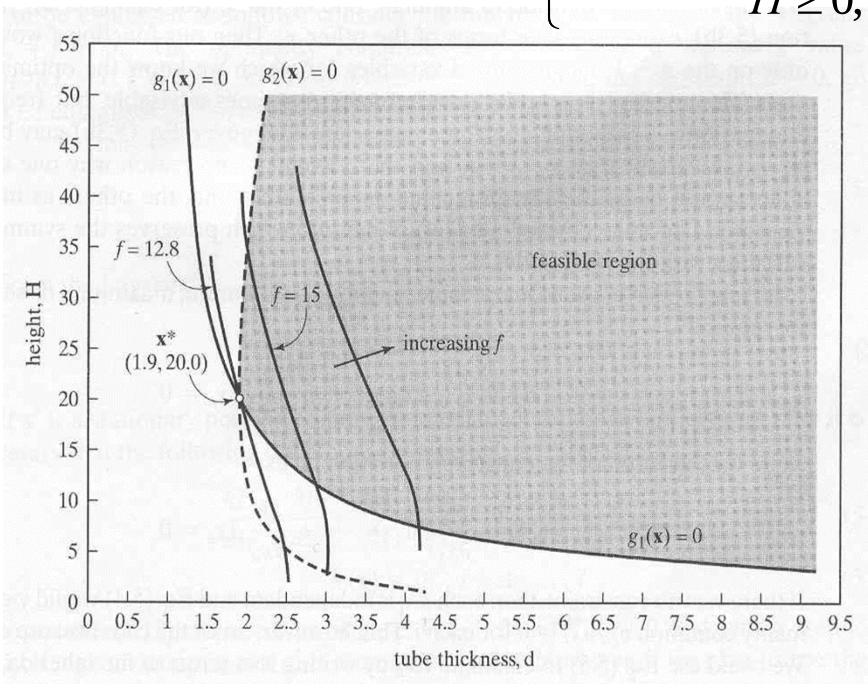
- The members are thin-walled tubes of steel, pinned together at the point F where a downward load of magnitude 2*P* is applied as shown. We will assume that the wall thickness of the tube is fixed at some value *t* and that the half-span is fixed at some value *B*. The design problems is to select *d* = the mean diameter of the tube, and *H*= height of the truss.



ρ = 0.3 *lb/in*^{3}
P = 33,000 *lb*
B = 30 *in*
t = 0.1 *in*
$E = 30\times10^6 psi$
σ_a = 100,000 *psi*

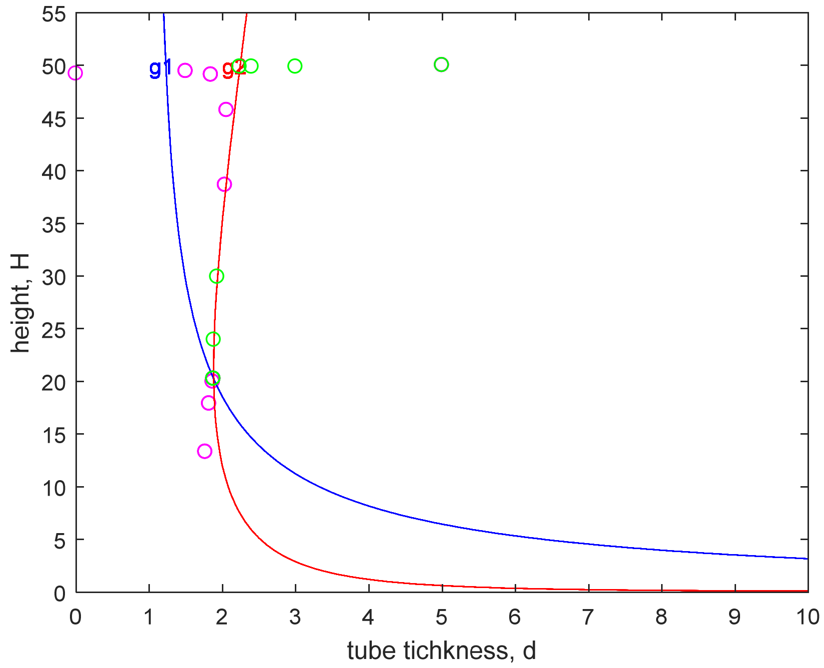
Formulation & Graphical Solution

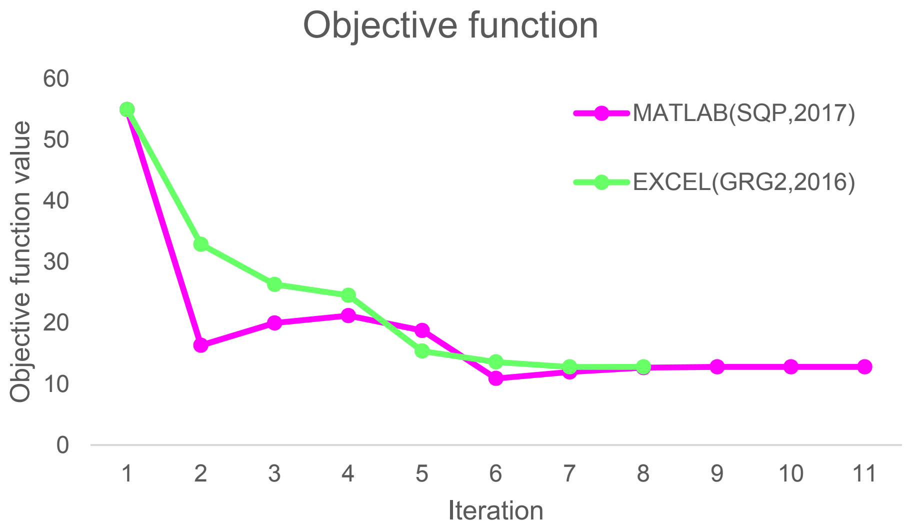
$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{H,d}{\text{minimize}}\, weight \\
&\text{subject to}\; \sigma \le \sigma_a \\
&\qquad\qquad\quad \sigma \le \sigma_{cr} \\
&\qquad\qquad\quad H \ge 0 \\
&\qquad\qquad\quad d \ge 0
\end{aligned}
\right\}
\xrightarrow{\sigma=\frac{P}{\pi t}\frac{\left(B^2+H^2\right)^{1/2}}{Hd},\ \sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E\left(d^2+t^2\right)}{8\left(B^2+H^2\right)}}
\left\{
\begin{aligned}
&\underset{H,d}{\text{minimize}}\; f = 2\rho\pi dt\left(B^2+H^2\right)^{1/2} \\
&\text{subject to}\; \frac{P\left(B^2+H^2\right)^{1/2}}{\sigma_a \pi t H d} - 1 \le 0 \\
&\qquad\qquad\quad \frac{8P\left(B^2+H^2\right)^{3/2}}{\pi^3 EtHd\left(d^2+t^2\right)} - 1 \le 0 \\
&\qquad\qquad\quad H \ge 0, d \ge 0
\end{aligned}
\right.
$$



Convergence History (1)

- Starting from a feasible initial design point (5, 50)





Convergence History (2)

- Starting from an infeasible initial design point (0.1, 5.0)