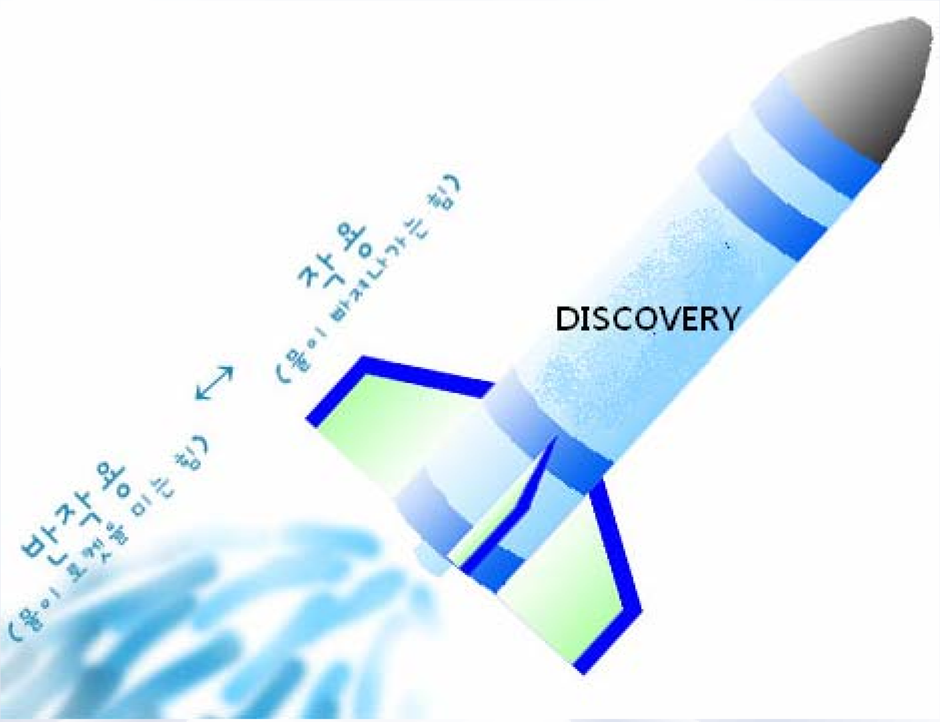
물로켓 최대비거리 를 위한 최적설계

Team : Discovery

박상정, 박정우

:::: 물로켓의 발사 원리



Newton's 3rd law : 작용과 반작용 법칙

비 압축성 유체인 물과 로켓 사이에 고압의 공기를 넣어서 빠른 속도로 분출, 추진력을 얻고 로켓 동체는 반대 방향으로 분출 에너지만큼 운동량을 얻게 된다.

:::: Modeling Process / Formulation Process

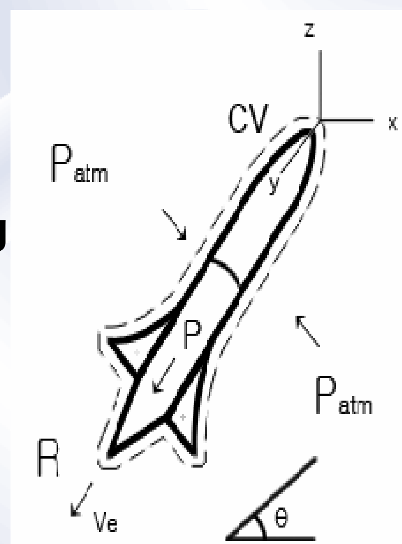
1.공기 저항은 무시
2.물의 유동은 비점성으로 가정
3.1.5L Pet병을 모델로 선정

Real System —formulation→ **Model**

deduction

Real Conclusions ← **Model Conclusions**

modeling

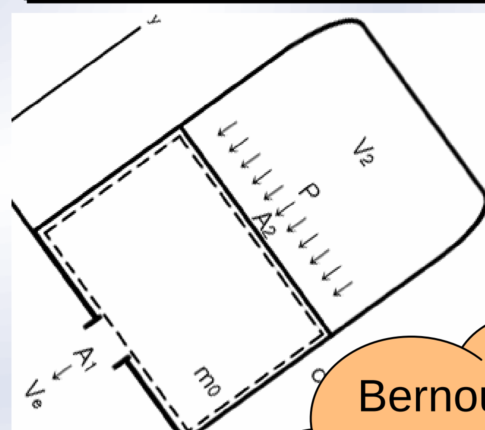


Step 1: Project Statement

—최대 비거리를 만들수 있는 물로켓을 설계

Step 2: Data and Information Collection

물의 밀도	$\rho_{water} = 1000 kg/m^3$
로켓의 무게	$m_R = 0.1 kg$
PET의 내부 지름	$D_R = 0.09 m$
PET의 출구 지름	$D_e = 0.02 m$
물의 압력	$P = 508.3 Kpa$
물의 배출 속도	$V_e = 31.88 m/s$



Bernoulli equation

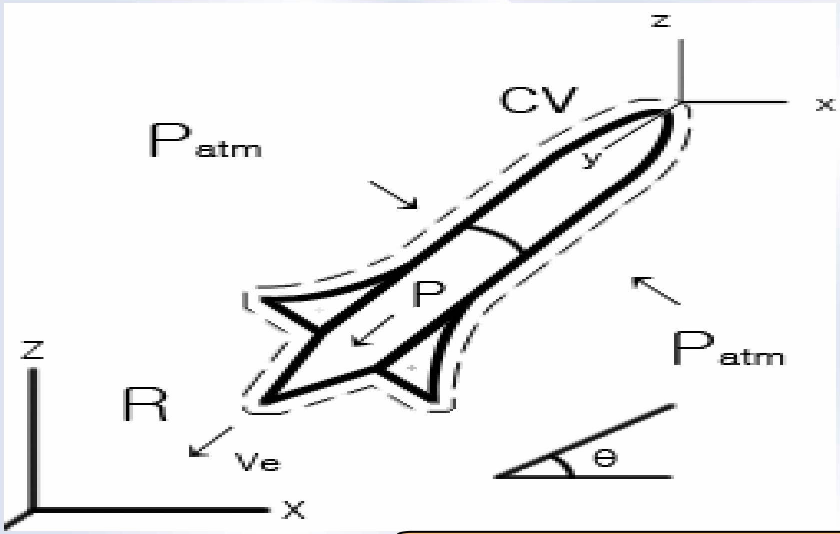
$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{V_e^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$$

:::: Formulation Process(2)

Step 3: Design Variables

θ : 발사각 m_o : 물의 질량

Step 4:Objective functions



1)선형 운동량 방정식 $-m\ddot{R} = -m\dfrac{d}{dt}(V_R\cos\theta\,\hat{i} + V_R\sin\theta\,\hat{k})$

$$\cancel{F_R} - \cancel{\int_{c.v} P \bullet \mathbf{n}dA} + \cancel{\int_{c.s} \tau dA} + \int_{c.v} \mathbf{g}\rho dv - m\ddot{R}$$

$$\int_{c.s} \vec{\mathbf{V}}(\rho\vec{\mathbf{V}}_{rel} \bullet d\mathbf{A}) = -\dot{m}_f(V_e\cos\theta\,\hat{i} + V_e\sin\theta\,\hat{k})$$

$$= \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \mathbf{V}\rho dv} + \int_{c.s} \mathbf{V}(\rho\mathbf{V}_{rel} \bullet d\mathbf{A})$$

$$-g\,m\,\hat{k} - m\dot{V}_R\cos\theta\,\hat{i} - m\dot{V}_R\sin\theta\,\hat{k} = -\dot{m}_f V_e\cos\theta\,\hat{i} - \dot{m}_f V_e\sin\theta\,\hat{k} \quad \text{:(a)식}$$

2) 연속방정식

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.v} \rho dv} + \int_{c.s} \rho\mathbf{V}_{rel} \bullet d\mathbf{A} = 0$$

$$m(t) = m_R + m_o - \dot{m}_f t \quad \text{:(b)식}$$

:(a)식 (b)식 연립

X축 가속도

$$\dot{V}_{Rx} = \frac{\dot{m}_f V_e\cos\theta}{m_R + m_o - \dot{m}_f t}$$

x 축 속도

$$V_{Rx} = V_e\cos\theta\ln\frac{m_R + m_o}{m_R + m_o - \dot{m}_f t}$$

Z축 가속도

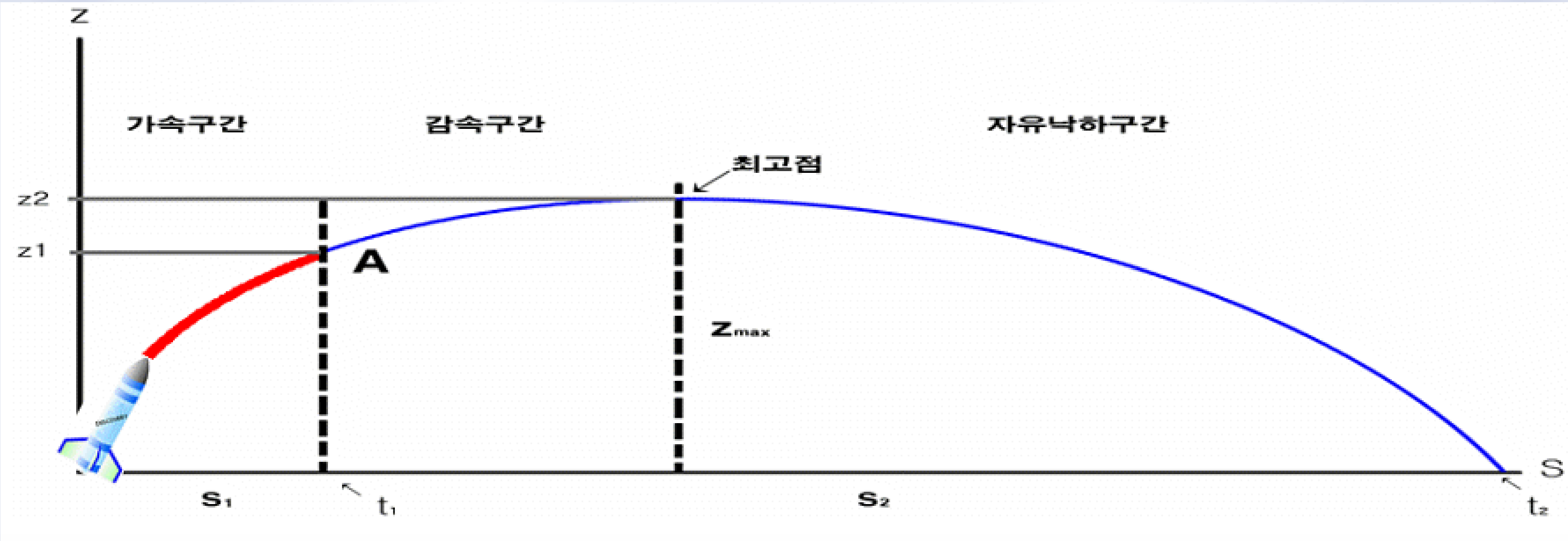
$$\dot{V}_{Rz} = \frac{\dot{m}_f V_e\sin\theta}{m_R + m_o - \dot{m}_f t} - g$$

Z축 속도

$$V_{Rz} = V_e\sin\theta\ln\frac{m_R + m_o}{m_R + m_o - \dot{m}_f t} - gt$$

:::: Formulation Process(3)

< 질점해석 >



$$S_{Max} = \int_0^{t_1} v_e \cos\theta \ln \frac{m_o + m_R}{m_o + m_R - \dot{m}_f t} dt + v_e \cos\theta \ln \frac{m_o + m_R}{m_R} t_2$$

$$t_1 = \frac{m_o}{\dot{m}_f} \qquad t_2 = \frac{V_o + \sqrt{V_o^2 + 2gZ_1}}{g}$$

$$V_{Az} = V_e \sin\theta \ln \frac{m_R + m_o}{m_R} - g \frac{m_o}{\dot{m}_f}$$

$$Z_1 = \int_0^{t_1} (V_e \sin\theta \ln \frac{m_o + m_R}{m_o + m_R - \dot{m}_f t} - gt)\, dt$$

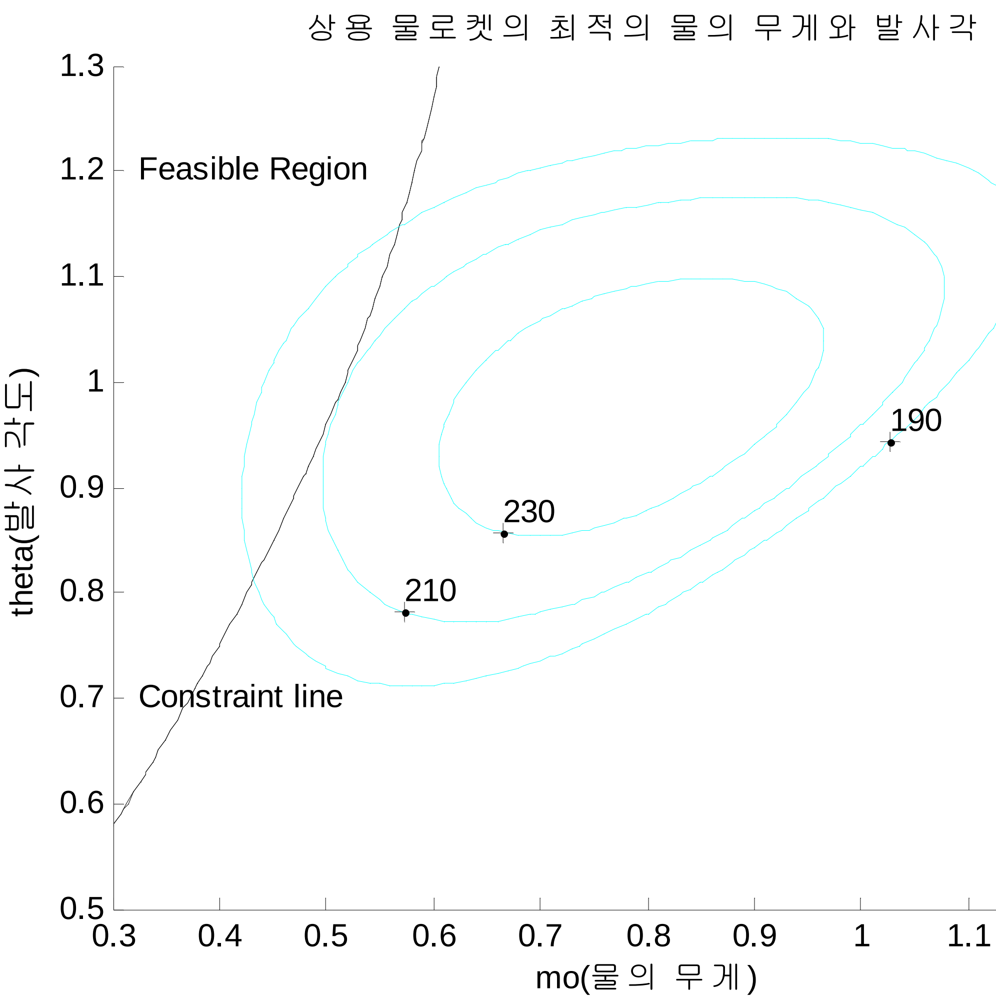
Step 5: Constraint

$$\dot{V}_{\mathbf{RZ}} = (\mathbf{V_R} \sin\theta) = \frac{\dot{m}_f \mathbf{V_e} \sin\theta}{m_o + m_R} \rangle\ g$$

$0 < m_o$(물의 무게)$< 1.5kg$

$0 < \theta$(발사각도)$< 90^0$

:::: Graphic Method



	A	B	C
1	M	0.6	0.509453
2	TH	0.9	0.982495
3	f	190.8456	209.3167
4	g1	-2.1E-08	
5			
6	각도	56.2928	
7	물의 양	0.509453	
8			

:::: 결론

Design Variables

θ : 발사각 m_o : 물의 질량

Objective functions

$$S_{Max} = \int_0^{t_1} v_e \cos\theta \ln \frac{m_o + m_R}{m_o + m_R - \dot{m}_f t} dt + v_e \cos\theta \ln \frac{m_o + m_R}{m_R} t_2$$

Constraint

$$\dot{V}_{\mathbf{RZ}} = (\mathbf{V_R} \sin\theta) = \frac{\dot{m}_f \mathbf{V_e} \sin\theta}{M_0} \rangle\ g$$

$$0 < m_o(\text{물의 무게}) < 1.5kg$$

$$0 < \theta(\text{발사각도}) < 90^o$$

Solution

물의 양 : **509.453g**

발사각 : **56.29도**

사거리 : **209.32m**

:::: 차후 과제

물로켓 대회의 PET병을 사용하여 만드는 일반적인 형태의 로켓을 모델링 하였다.

➡ 최대사거리를 위하여 발사각과 물의 양 뿐만 아니라, 로켓의 형태와 압력 등의 다른 변수를 도입하고, 후에 배울 다변수에 대한 최적설계 Methods를 적용한다.

추가되는 변수

P(공기압력),

D_1 (몸체 지름), D_2 (노즐 지름)

H(물로켓 길이), t(로켓의 두께)

추가되는 구속 조건

$$\pi D_1 H + \frac{3}{32}\pi D_1^2(\text{부피}) < 0.0015m^3$$

$$\frac{P D_1}{4t} < \sigma_{allowalbe}$$

$$D_1 > D_2$$