

의자 넘어짐 받침대 최적화

(2nd Project)

금 조

김민석(2003005974)

이용환(2004007036)

목 차

1. Project 1 내용 수정

- 모델 재해석 및 문제정식화
- 바뀐 문제에서의 초기값 예상

2. Optimum Solution 구하기

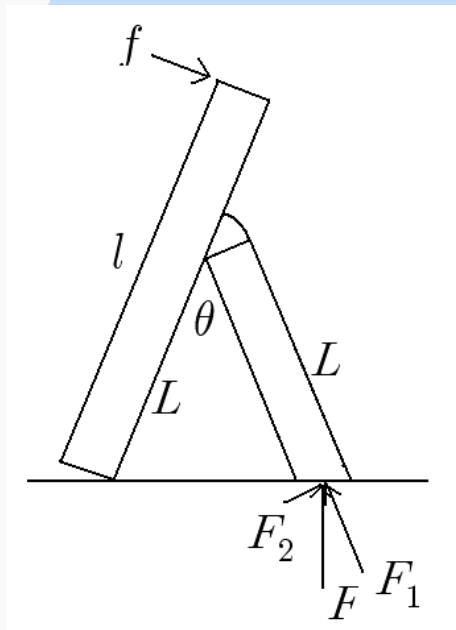
- Excel Solver 이용
- Matlab Optimization Tool 이용
(Fmincon, Genetic Algorithm, Pattern Search)
- 결과 고찰

3. 최적의 물성치 찾기

1. Project 1 내용 수정

모델 재 해석

- 힘의 방향을 축 방향이 아닌 바닥에 수직 방향으로 하여 재 해석
(제약조건 1개 추가)



$$\sum M = 0 \quad fl - 2FL \sin \frac{\theta}{2} = 0 \quad F = \frac{fl}{2L \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$F_1 = F \cos \frac{\theta}{2} = \frac{fl}{2L \tan \frac{\theta}{2}}$$

$$F_2 = F \sin \frac{\theta}{2} = \frac{fl}{2L}$$

White Oak

$E = 12 \text{ GPa}$, $\rho = 690 \text{ kg/m}^3$, $\tau_{all} = 13.8 \text{ MPa}$

$f = 1600 \text{ N}$

factor of safety = 5

length (l) = 0.5m

$K_{ce} = 0.418$

$d_0 = 0.05 \text{ m}$

1. Project 1 내용 수정

- 문제 재 설정

variables : d, L, θ

minimize $f = 2\rho d^2 L$

$$\text{constraint } g_1 : \frac{fl}{4L \tan \frac{\theta}{2}} f_s - \frac{\pi^2 E d^2}{3L^2} \leq 0$$

$$g_2 : \frac{1}{2} \frac{fl}{2L d^2 \tan \frac{\theta}{2}} f_s - \frac{K_{ce} E d^2}{L^2} \leq 0$$

$$g_3 : \frac{3}{8} \frac{fl}{L d^2} f_s - \tau_{all} \leq 0$$

$$g_4 : -L \leq 0 \quad g_5 : L - l \leq 0$$

$$g_6 : -\theta \leq 0 \quad g_7 : \theta - \frac{\pi}{2} \leq 0$$

$$g_8 : -d \leq 0 \quad g_9 : d - d_0 \leq 0$$

$$g_{10} : 20 - \frac{L}{d} \leq 0 \quad g_{11} : \frac{L}{d} - 50 \leq 0$$

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
E	12000000000	N/m^2							
Kce	0.418	none							
angle	1.047197551	theta							
l	0.5	m							
f	1600	N							
rho	690	kg/m^3							
tau_allowable	13800000	N/m^2							
factor of safety	5	none							
design variables	initial value	final value							
d	0.01	0.019043395							
L	0.4	0.380867891							
cost function									
f		0.190608462							
constraint									
g1	-98691496.37	<=							
g2	6.44475E-07	<=							
g3	-2940041.437	<=							
g4	-0.380867891	<=							
g5	-0.119132109	<=							
g6	-0.019043395	<=							
g7	-0.030956605	<=							
g8	0	<=							
g9	-30	<=							

해 찾기 모델 설정

목표 셀(E):

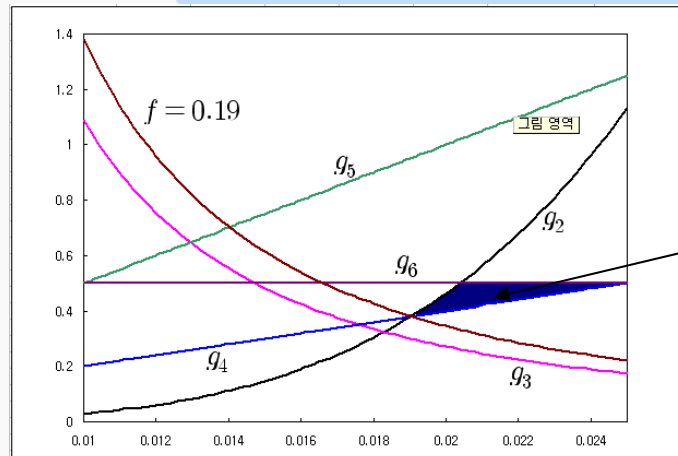
해의 조건: ☐ 최대값(M) ☒ 최소값(N) ☐ 지정값(V):

값을 바꿀 셀(B):

제한 조건(U):

추가(A)... 변경(C)... 삭제(D)

실행(S) 닫기 옵션(O)... 초기화(B) 도움말(H)



Feasible area

Theta = 60 일 때 결과
 $d = 0.019$
 $L = 0.38$

2. Optimum Solution 구하기(Excel Solver)

- Excel Solver 이용하여 최적화 한 결과
: 전 과정에서 구한 초기값을 이용한다

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
E	12000000000	N/m ²								
Kce	0.418	none								
l	0.5	m								
f	1600	N								
rho	690	kg/m ³								
tau_allowable	13800000	N/m ²								
factor of safety	5	none								
design variables	initial value	final value								
d	0.019	0.017581694								
L	0.38	0.351633887								
angle	1.047197551	1.265912467								
cost function										
f	0.15									
constraint										
g1	-98692167.46	<=	0							
g2	1.19209E-07	<=	0							
g3	2.57045E-07	<=	0							
g4	-0.351633887	<=	0							
g5	-0.148366113	<=	0							
g6	-1.047197551	<=	0							
g7	-0.523598776	<=	0							
g8	-0.017581694	<=	0							
g9	-0.032418306	<=	0							
g10	-2.38419E-08	<=	0							
g11	-29.99999998	<=	0							

해 찾기 모델 설정

목표 셀(E):

해의 조건: ☐ 최대값(M) ☒ 최소값(N) ☐ 지정값(V):

값을 바꿀 셀(B):

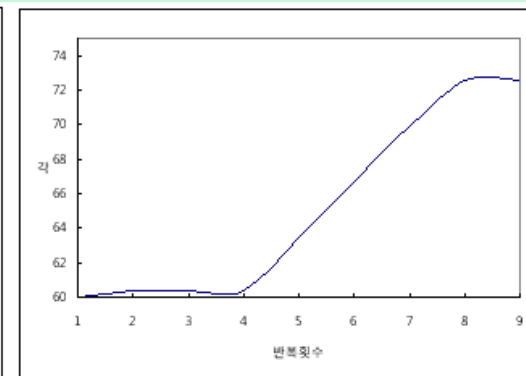
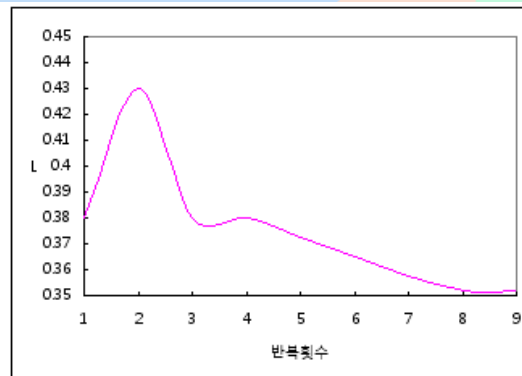
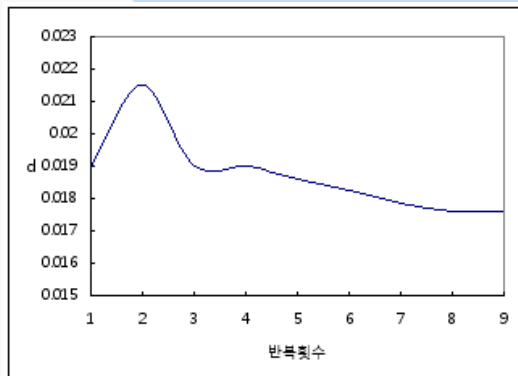
제한 조건(U):

추가(A)... 변경(C)... 삭제(D)

실행(S) 닫기 옵션(O)... 초기화(B) 도움말(H)

2. Optimum Solution 구하기(Excel Solver)

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
시나리오 요약											
변경 셀:											
d		0.019	0.0215	0.019	0.018989979	0.018615408	0.01824021	0.01786363	0.017581694	0.017581694	
L		0.38	0.43	0.38	0.379799572	0.372308154	0.364804205	0.357272601	0.351633887	0.351633887	
theta		1.047198598	1.054511673	1.054511673	1.054511673	1.107237256	1.162599119	1.220729075	1.26591373	1.265912467	
결과 셀:											
f		0.1893084	0.274299155	0.189308396	0.18900901	0.178043752	0.167493749	0.157332423	0.15	0.15	
g1		-98691485.99	-98692051.41	-98691522.17	-98691521.85	-98691698.49	-98691871.89	-98692042.39	-98692167.7	-98692167.46	
g2		86102.29753	-3899178.406	-19846.57122	-15.20544843	-15.52292032	-15.88403793	-16.29629682	-16.64202855	1.00583E-07	
g3		-2865461.438	-6253494.785	-2865461.209	-2848141.157	-2173644.263	-1441329.838	-643144.211	1.52737E-07	2.75671E-07	
g8		-0.019	-0.0215	-0.019	-0.018989979	-0.018615408	-0.01824021	-0.01786363	-0.017581694	-0.017581694	
g9		-0.031	-0.0285	-0.031	-0.031010021	-0.031384592	-0.03175979	-0.03213637	-0.032418306	-0.032418306	
g10		0	1.64534E-07	-2.0904E-07	0	0	-5.68434E-14	-5.68434E-14	0	-2.38419E-08	
g11		-30	-30.00000016	-29.99999979	-30	-30	-30	-30	-30	-29.99999998	
		60.00006	60.41906829	60.41906829	60.41906829	63.4400217	66.61202279	69.94262393	72.53151397	72.53144157	



결과 : $d=1.76\text{cm}$ $L=0.3516\text{m}$ $\theta = 72.5$ $f=0.15\text{kg}$

2. Optimum Solution 구하기(Matlab)

- M file 구성

cost function

```
function f=cost(x)
f = 2 * 690 * x(1)^2 * x(2);
```

constraint

```
function [c,ceq]=constraint(x)
E = 12 * 10^9;    Kce = 0.418;    l = 0.5;    force = 1600;
tau = 13.8 * 10^6;    fs = 5;    d0 = 0.05;

c(1)= (force * l * fs)/(4 * x(2) * tan(x(3)/2)) - (pi^2 * E * x(1)^2)/(3*x(2)^2);
c(2)= (force * l * fs)/(4 * x(1)^2 * x(2) * tan(x(3)/2)) - (Kce * E * x(1)^2)/(x(2)^2);
c(3)= (3 * force * l * fs)/(8 * x(1)^2 * x(2)) - tau;
c(4)= -x(2);
c(5)= x(2) - l;
c(6)= -x(3);
c(7)= x(3) - (pi / 2);
c(8)= -x(1);
c(9)= x(1) - d0;
c(10)= 20 - (x(2) / x(1));
c(11)= (x(2) / x(1)) - 50;    ceq=[];
```

2. Optimum Solution 구하기(Matlab)

- fmincon 사용 결과

```
Command Window
>> [x,fval,exitflag,output]=fmincon('cost',x0,[],[],[],[],[],'constraint')
Warning: Trust-region-reflective method does not currently solve this type of problem,
using active-set (line search) instead.
> In fmincon at 437
Optimization terminated: first-order optimality measure less
than options.TolFun and maximum constraint violation is less
than options.TolCon.
No active inequalities.

x =

    0.0176    0.3518    1.2758

fval =

    0.1500

exitflag =

     1

output =

    iterations: 5
    funcCount: 24
    lssteplength: 1
    stepsize: 1.5928e-007
    algorithm: 'medium-scale: SQP, Quasi-Newton, line-search'
    firstorderopt: 7.0059e-007
    constrviolation: -1.5944e-006
    message: [1x144 char]
```

5회 반복결과

d=0.0176

L=0.3518

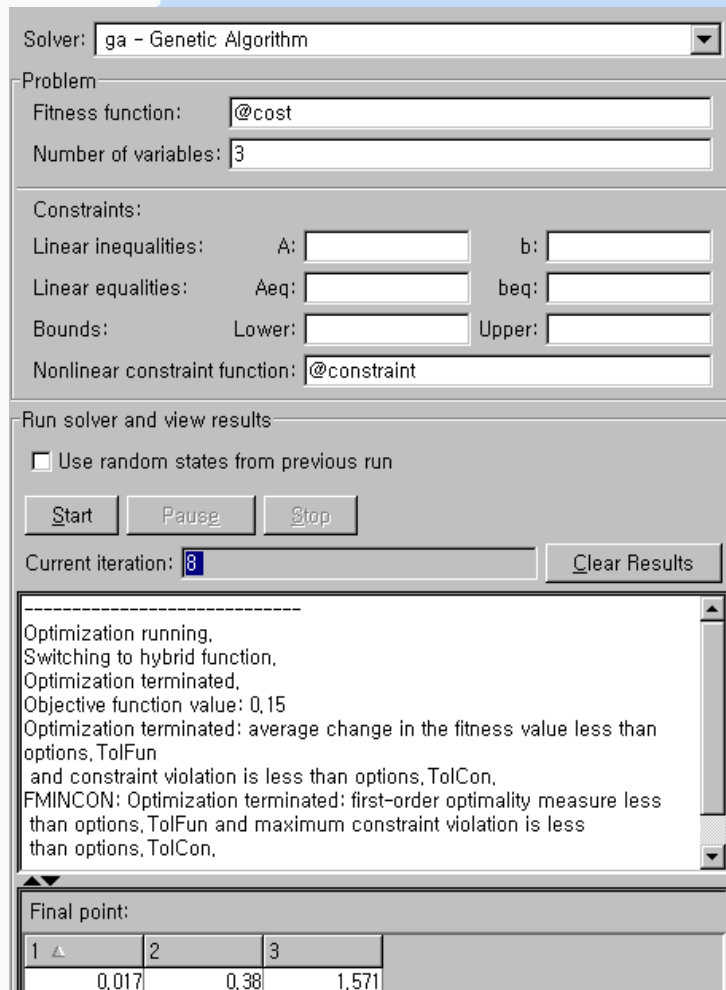
theta = 1.2758 (약 73.1도)

f=0.15

의 결과가 얻어졌으며,
exitflag =1 인 점으로 보아 결과값이
수렴값임을 알 수 있다.

2. Optimum Solution 구하기(Matlab)

- Genetic Algorithm 사용결과



Solver: ga - Genetic Algorithm

Problem

Fitness function: @cost

Number of variables: 3

Constraints:

Linear inequalities: A: b:

Linear equalities: Aeq: beq:

Bounds: Lower: Upper:

Nonlinear constraint function: @constraint

Run solver and view results

☐ Use random states from previous run

Start Pause Stop

Current iteration: 8 Clear Results

Optimization running.
Switching to hybrid function.
Optimization terminated.
Objective function value: 0.15
Optimization terminated: average change in the fitness value less than options.TolFun
and constraint violation is less than options.TolCon.
FMINCON: Optimization terminated: first-order optimality measure less than options.TolFun and maximum constraint violation is less than options.TolCon.

Final point:

1	2	3
0.017	0.38	1.571

- 처음 default 상태에서 실행한 결과 제대로 된 값이 나오지 않는다.
- 추가적인 옵션 사용
Initial population : [0.019, 0.38, pi/3]
Hybrid function : fmincon, fminunc
Population Size : 40
- 8번의 반복결과,
d=0.017, L=0.38, theta=1.57(약 90도)
f=0.15 의 값이 얻어졌다.

2. Optimum Solution 구하기(Matlab)

- Pattern search 사용결과

The screenshot shows the MATLAB Pattern Search solver window. The Solver is set to 'patternsearch - Pattern Search'. The Objective function is '@cost' and the Start point is '0.019 0.38 pi/3'. The Constraints section is empty. The Run solver and view results section shows 'Use random states from previous run' is unchecked, and buttons for Start, Pause, Stop, and Clear Results. The Current iteration is 8. The optimization running log shows: 'Optimization running.', 'Optimization terminated.', 'Objective function value: 0.15000000000000013', 'Optimization terminated: norm of the step is less than 2.22045e-016 and constraints violation is less than options.TolCon.', and 'Final point:'. The final point table shows values 0.017, 0.377, and 1.571 for the three dimensions.

	1	2	3
Final point:	0.017	0.377	1.571

- Starting Point = $[0.019, 0.38, \pi/3]$
- G.A 처럼 default 옵션을 사용한 결과 제대로 된 값을 얻을 수 없었다.
- 추가적인 옵션 사용
Poll method : MADS Positive basis 2N
Mesh accelerator : on
Stopping criteria :
Mesh, X, Function, Nonlinear, constraint Tolerance : $1e-10$
- 8번의 반복결과
 $d=0.017$, $L=0.377$, $\theta=1.571$ (약 90도),
 $f=0.15$ 의 값을 얻었다.

2. Optimum Solution 구하기(Matlab)

- 고찰

	d	L	Theta	f
Excel Solver	1.76cm	0.3516m	72.5	0.15
Fmincon	1.76cm	0.3518m	73.1	0.15
Genetic Algorithm	1.7cm	0.38m	90	0.15
Pattern Search	1.7cm	0.377m	90	0.15

1. 4가지 결과 모두 같은 목적함수 값을 보였으나, 변수 d L theta 값이 조금씩 차이를 보인다. -> 직접 구한 최적값 들을 제약조건에 넣어 본 결과 제약조건을 모두 만족한다.
2. 변수값이 조금씩 달라도 목적함수 값이 동일하므로 Multiple Solution 일 것으로 예상된다.

2. Optimum Solution 구하기(Matlab)

E	12000000000	N/m^2
Kce	0.418	none
l	0.5	m
f	1600	N
rho	690	kg/m^3
tau_allowable	13800000	N/m^2
factor of safety	5	none

design variables	initial value	final value
d	0.017	0.016912796
L	0.38	0.379998049
angle	1.570796327	1.570796327

cost function	
f	0.15

constraint		
g1	-78201159.61	<= 0
g2	-736320.6649	<= 0
g3	-2.96161E-07	<= 0
g4	-0.379998049	<= 0
g5	-0.120001951	<= 0
g6	-1.570796327	<= 0
g7	0	<= 0
g8	-0.016912796	<= 0
g9	-0.033087204	<= 0
g10	-2.468080158	<= 0
g11	-27.53191984	<= 0

해 찾기 모델 설정

목표 셀(E):

해의 조건: ☐ 최대값(M) ☒ 최소값(N) ☐ 지정값(V):

값을 바꿀 셀(B):

제한 조건(U):

-
-
-
-
-
-

$$f = 2 \rho d^2 L$$

$$g_3 : \frac{3}{8} \frac{f l}{L d^2} f s - \tau_{all} \leq 0$$

$$\frac{3}{8} f l f s - \tau_{all} L d^2 \leq 0$$

- 초기값을 d=0.017 L=0.38 theta=90 으로 ExcelSolver로 최적해 구하기
- 결과값 : d=0.0169, L=0.38, theta=90 Active constraint : g3, g7
- Multiple Solution 예상 : 목적함수 f 와 constraint g3의 형태는 다음과 같다. g3을 정리하면 d^2*L의 형태로 목적함수 f 와 동일한 형태
- ~ 다른 제약조건들이 만족되는 범위 내에서 multiple solution 임을 알 수 있다.

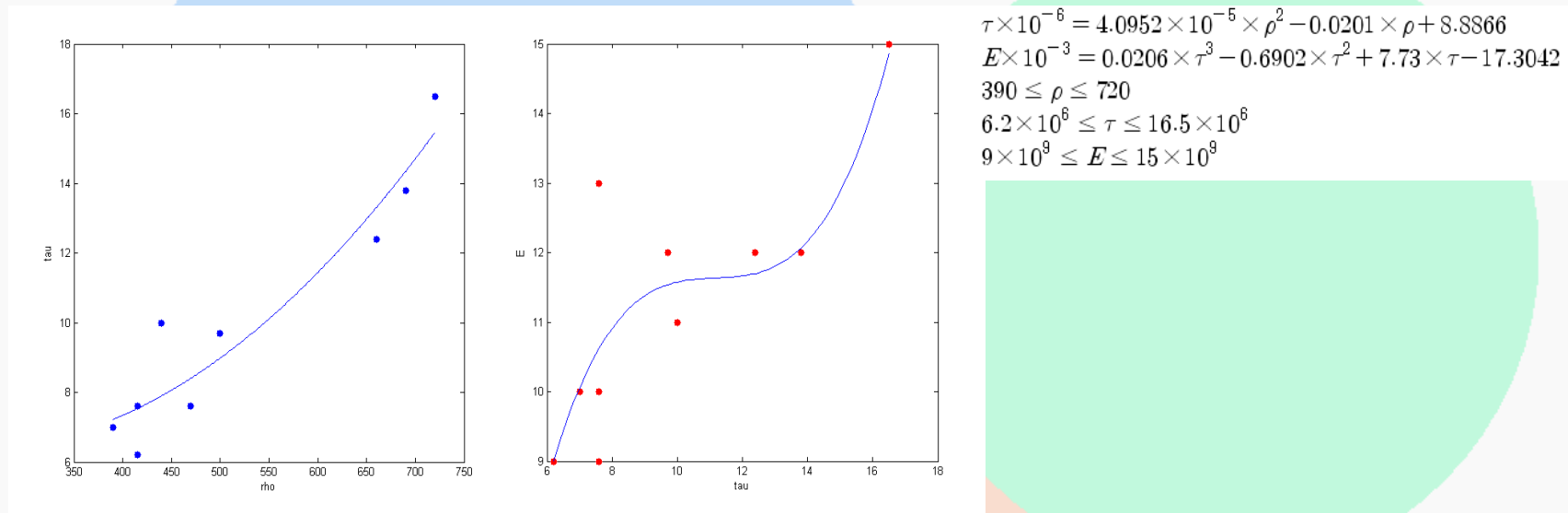
3. 최적의 물성치 찾기

- 이용가능한 재료의 물성치를 Linked Discrete Variables로 설정하여 어떤 재료가 가장 최적의 값을 주는지를 알아본다.

Material	Density (kg/m ³)	Shear Strength (Mpa)	Elasticity (Gpa)
Western white pine	390	7	10
Redwood	415	6.2	9
Ponderosa pine	415	7.6	9
Spruce, Sitka	415	7.6	10
Whestern hemlock	440	10	11
Douglas fir	470	7.6	13
Shortleaf pine	500	9.7	12
Red oak	660	12.4	12
White oak	690	13.8	12
Shagbark hickory	720	16.5	15

3. 최적의 물성치 찾기

- 물성치간의 관계 근사식 유도.(최소자승법)



d 와 L 값을 결정하는 g2, g3 에 관여하는 물성치인 shear strength, Elasticity 가 값이 클수록 변수 d, L 값이 줄어들 것이고, 목적함수 f 에 관여하는 Density 값이 작을수록 목적함수 값이 줄어들 것이다. 세 물성치가 모두 같이 감소하거나 증가하는 경향을 보이므로 범위 내에 적당한 물성치 값이 존재할 것으로 예상된다.

3. 최적의 물성치 찾기

- 문제 재 설정 및 풀이

Kce	0.418	none
l	0.5	m
f	1600	N
factor of safety	5	none

design variables	initial value	final value
d	0.019	0.021762807
L	0.38	0.435256145
angle	1.047197551	1.055819517
rho	390	390
tau	6.2	7.2763992
E	9	10.33532293

cost function	
f	0.160793817

inequality constraint		
g1	-85000683.83	<= 0
g2	-2481380.086	<= 0
g3	9.75095E-07	<= 0
g4	-0.435256145	<= 0
g5	-0.064743855	<= 0
g6	-1.055819517	<= 0
g7	-0.51497681	<= 0
g8	-0.021762807	<= 0
g9	-0.028237193	<= 0
g10	0	<= 0
g11	-30	<= 0
g12	0	<= 0
g13	-330	<= 0
g14	-1.0763992	<= 0
g15	-9.2236008	<= 0
g16	-1.335322929	<= 0
g17	-4.664677071	<= 0

equality constraint		
h1	0	= 0
h2	0	= 0

해 찾기 모델 설정

목표 셀(E):

해의 조건: ☐ 최대값(M) ☒ 최소값(N) ☐ 지정값(V):

값을 바꿀 셀(B):

제한 조건(U):

-
-
-
-
-
-

추가(A)... 변경(C)... 삭제(D)

실행(S) 닫기 옵션(O)... 초기화(R) 도움말(H)

- 입력하는 초기값마다 다른 결과가 나온다. ~ 수많은 Local minimum 있을 것으로 예상된다.

- Genetic Algorithm, Pattern Search 등의 Matlab의 다양한 Optimization Tool 을 사용하여도 Global minimum 값을 얻을 수 없었다.

3. 최적의 물성치 찾기

- 직접 물성치 대입하여 Excel Solver 을 통한 Global Minimum 값 구하기.

Material	Density (kg/m ³)	Shear Strength (Mpa)	Elasticity (Gpa)	d	L	angle	f
Western white pine	390	7	10	0.022	0.4438	60.45	0.16714
Redwood	415	6.2	9	0.023	0.4622	60.45	0.20081
Ponderosa pine	415	7.6	9	0.02145	0.429	60.23	0.16382
Spruce, Sitka	415	7.6	10	0.02145	0.429	60.23	0.16382
Whestern hemlock	440	10	11	0.01957	0.3915	60.22	0.132
Douglas fir	470	7.6	13	0.02145	0.429	60	0.1855
Shortleaf pine	500	9.7	12	0.01974	0.3968	60.22	0.1546
Red oak	660	12.4	12	0.01819	0.3656	67.31	0.1597
White oak	690	13.8	12	0.01758	0.3516	72.53	0.15
Shagbark hickory	720	16.5	15	0.01657	0.3313	72.73	0.13091