Buckling 해석

Computational Design Laboratory
Department of Automotive Engineering
Hanyang University, Seoul, Korea

한양대학교 HANYANG UNIVERSITY
CDL Computational Design Lab

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

목차

- 예제 문제
  - Column buckling
  - Panel buckling
- 해석 프로세스
  - 기하형상 생성
  - 재료 물성 및 특성 입력
  - 요소망 생성
  - 구속조건 설정
  - 하중조건 설정
  - 해석케이스 정의 및 해석 실행
  - 후처리

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

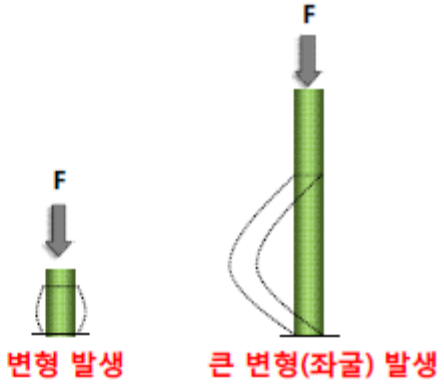
예제: COLUMN BUCKLING (1)

좌굴 해석

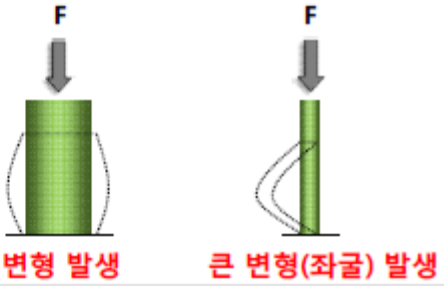
- 좌굴해석은 압축력을 받는 구조물의 불안정성 여부를 판단하기 위한 해석이다.
- 좌굴에 의한 구조물의 불안정성은 재료 강도에 무관하고, 구조물의 기하학적 형상 및 강성, 구속 조건과 밀접관 관련이 있다.
- 가늘고 긴 구조물 끝에 구조물 축 방향으로 압축력이 작용하는 경우, 하중의 크기가 작을 때에는 하중의 크기에 비례하여 구조물이 압축변형을 하지만, 특정 크기 이상의 하중이 작용하면 좌굴이 발생하여 하중의 크기가 증가하지 않아도 구조물이 크게 변형을 일으키게 된다.

원기둥의 좌굴 형상

A. 길이가 다르고 면적이 같은 원기둥에 같은 크기의 압축력을 받는 경우



B. 면적은 다르고 길이는 같은 원기둥에 같은 크기의 압축력을 받는 경우



- A의 경우에는 두 원기둥의 면적이 같기 때문에 $\sigma=F/A$ 공식에 의해 발생하는 응력크기가 같다.
  하지만 기둥의 길이가 길어진 경우에는 큰 변형(좌굴)이 발생할 수 있다.

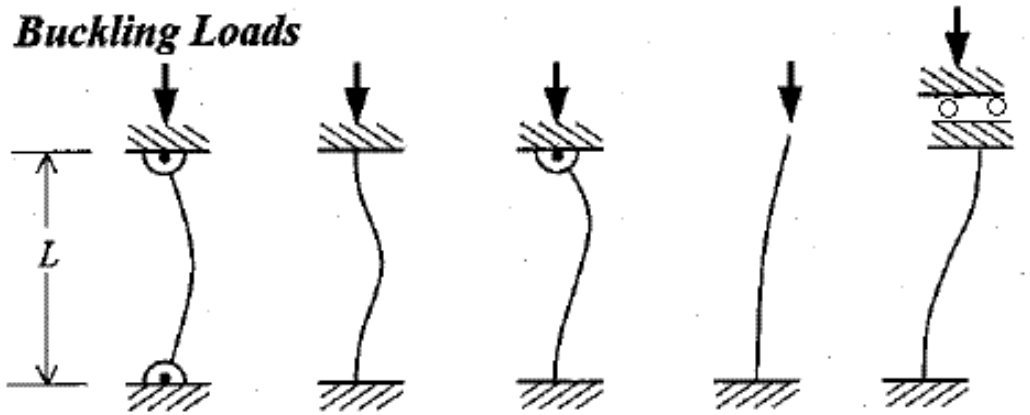
- B의 경우에는 두 원기둥의 길이는 같지만 면적이 다르기 때문에 동일한 압축력을 가하게 되면 면적이 작은 쪽에서 더 큰 응력을 받기 때문에 좌굴이 발생하게 된다.
  즉, 원기둥의 면적이 작을수록(압축응력이 클수록), 길이가 길수록 좌굴이 발생할 확률이 높아진다.

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

예제: COLUMN BUCKLING (2)

하중/경계 조건

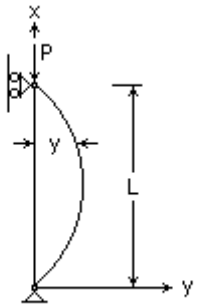
- 하중은 주로 가늘고 긴 구조물의 축방향에 대한 압축력을 가하는 경우가 일반적이며, 하중을 입력 하는 방식은 선형 정적 해석의 경우와 동일하다.
- 좌굴 해석에서의 경계조건 역시 선형 정적 해석에서의 경계조건 입력 방법과 동일하다.
- 단, 구조물의 좌굴 하중은 부재의 구속 조건에 따라 상당히 달라지므로 구속의 성분은 좌굴을 고려하여 합리적으로 설정할 필요가 있다.



Buckling Load	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{2.045\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$
Effective Length	L	$0.5L$	$0.699L$	$2L$	L

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

예제: COLUMN BUCKLING (3)



Slender Pinned Column

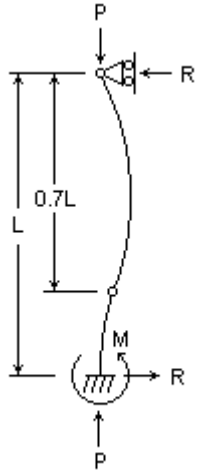
$$M = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = P_{cr}y$$

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P_{cr}y = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{P_{cr}}{EI}y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda^2 y = 0$$

Homogeneous solution

$$: y = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) \qquad y(0) = y(L) = 0$$

$$: y = A\sin(\frac{n\pi}{L}x) \quad n = 1,2,3... \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = (\frac{n\pi}{L})^2 = \frac{P_{cr}}{EI} \quad \rightarrow P_{cr} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}EI$$



Fixed-Pinned Column

$$M = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = P_{cr}y - R(L-x)$$

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P_{cr}y = R(L-x) \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{P_{cr}}{EI}y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda^2 y = \frac{R}{EI}(L-x)$$

$\rightarrow$ Non-Homogeneous solution

General solution: $y_h = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$

Particular solution: $y_p = \frac{R}{P}(L-x)$

$\Big\}\ y(0) = y(L) = 0, y'(0) = 0$

$$: y = \frac{R}{P\lambda}\sin(\lambda x) - \frac{RL}{P}\cos(\lambda x) - \frac{R}{P}(L-x) \quad \rightarrow \quad \lambda L = \tan\lambda L \quad \rightarrow P_{cr} = \lambda^2 EI$$

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

예제: COLUMN BUCKLING (4)

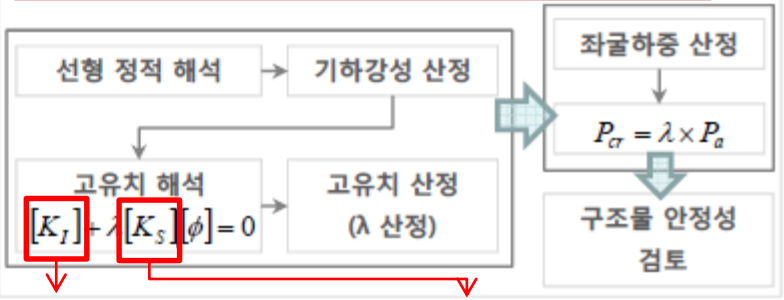
따라하기 목적

➢ **기본적인 선형 좌굴 해석에 대한 이해**
- 선형 좌굴 해석 절차에 대한 이해

선형 좌굴 해석의 종류

- 크기가 큰 압축 하중을 받는 구조물
- 축하중을 받는 가느다란 기둥 형태의 구조물
- 외부 압력을 받는 얇은 두께의 원통형 구조물
- 테두리에 압력을 받는 얇은 판 형태의 구조물
- 상부 표면에 횡방향의 끝단 하중을 받는 길고 얇은 외팔보 형태의 구조물

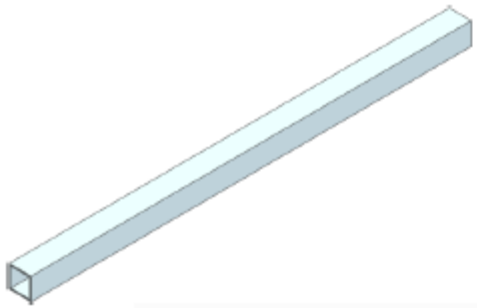
선형 좌굴 해석



탄성 강성 행렬 기하 강성 행렬

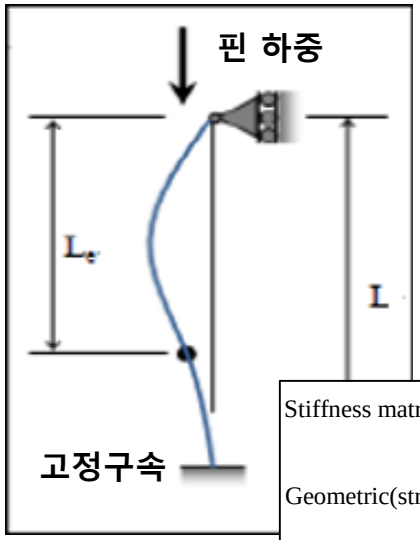
해석 개요

➢ **대상 모델**

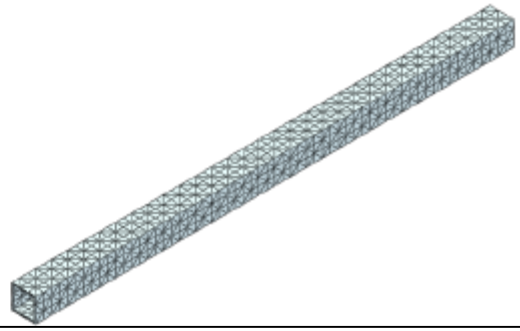


탄성계수	7e+010	N/m²
프와송비	0.33	
질량밀도	7.85	kg/m³

➢ **경계조건 (대칭조건, 핀구속)**



➢ **유한요소모델 (사면체 요소망)**



Stiffness matrix: $K_I = \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}][\mathbf{B}] dV$ where $[\boldsymbol{\varepsilon}] = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{U}]$

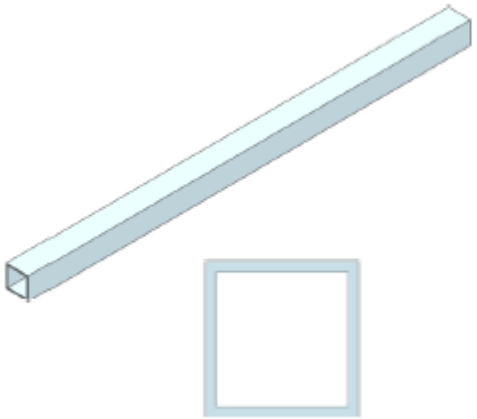
Geometric(stress) stiffness matrix: $K_S = \int [\mathbf{G}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{s} & & \\ & \mathbf{s} & \\ & & \mathbf{s} \end{bmatrix} [\mathbf{G}] dV$

where $[\boldsymbol{\delta}] = [\mathbf{G}]^T [\mathbf{U}]$, $[\boldsymbol{\delta}] = [u, _x \; u, _y \; u, _z \; v, _x \; v, _y \; v, _z \; w, _x \; w, _y \; w, _z]$ $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & \tau_{xy0} & \tau_{xz0} \\ \tau_{yx0} & \sigma_{y0} & \tau_{yz0} \\ \tau_{zx0} & \tau_{zy0} & \sigma_{z0} \end{bmatrix}$

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

예제: COLUMN BUCKLING (5)

임계하중의 계산



$$P_{cr} = \lambda^2 EI,\ \ \lambda L = \tan \lambda L\ \ (\lambda L \approx \exp[\cosh^{-1}((2n+1)\pi / 4)])$$

단면 : $150mm \times 150mm$
두께 (t) : $10mm$
길이 (L) : $3000mm$

$P = 160\ kN$

$E = 70\ GPa$

$\nu = 0.33$

$P_1 = 2883$ kN

$P_2 = 8533$ kN

$P_3 = 17003$ kN

$P_4 = 28295$ kN

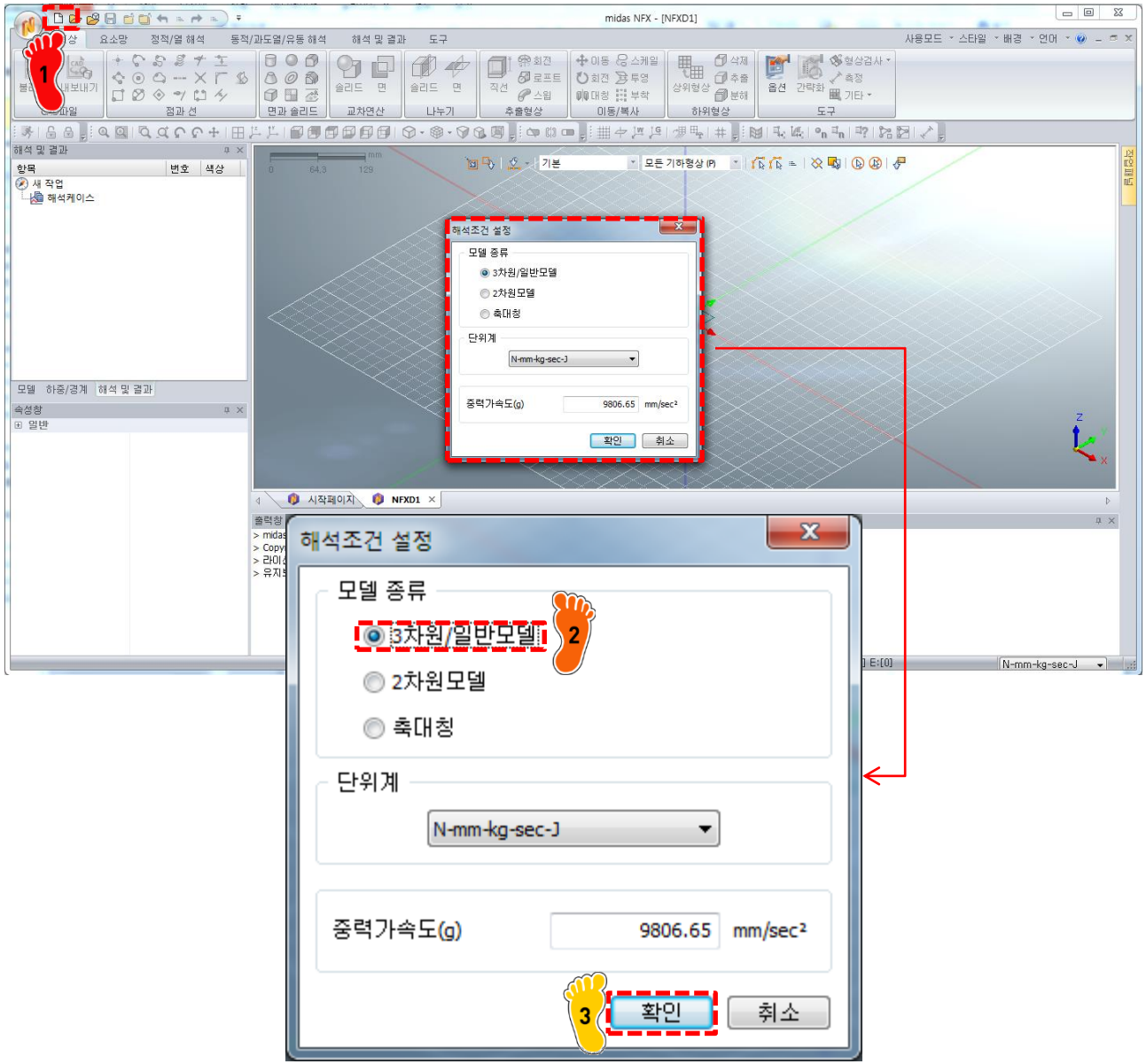
$P_5 = 42409$ kN

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

COLUMN BUCKLING
빔 요소

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

기하형상 생성 (1)

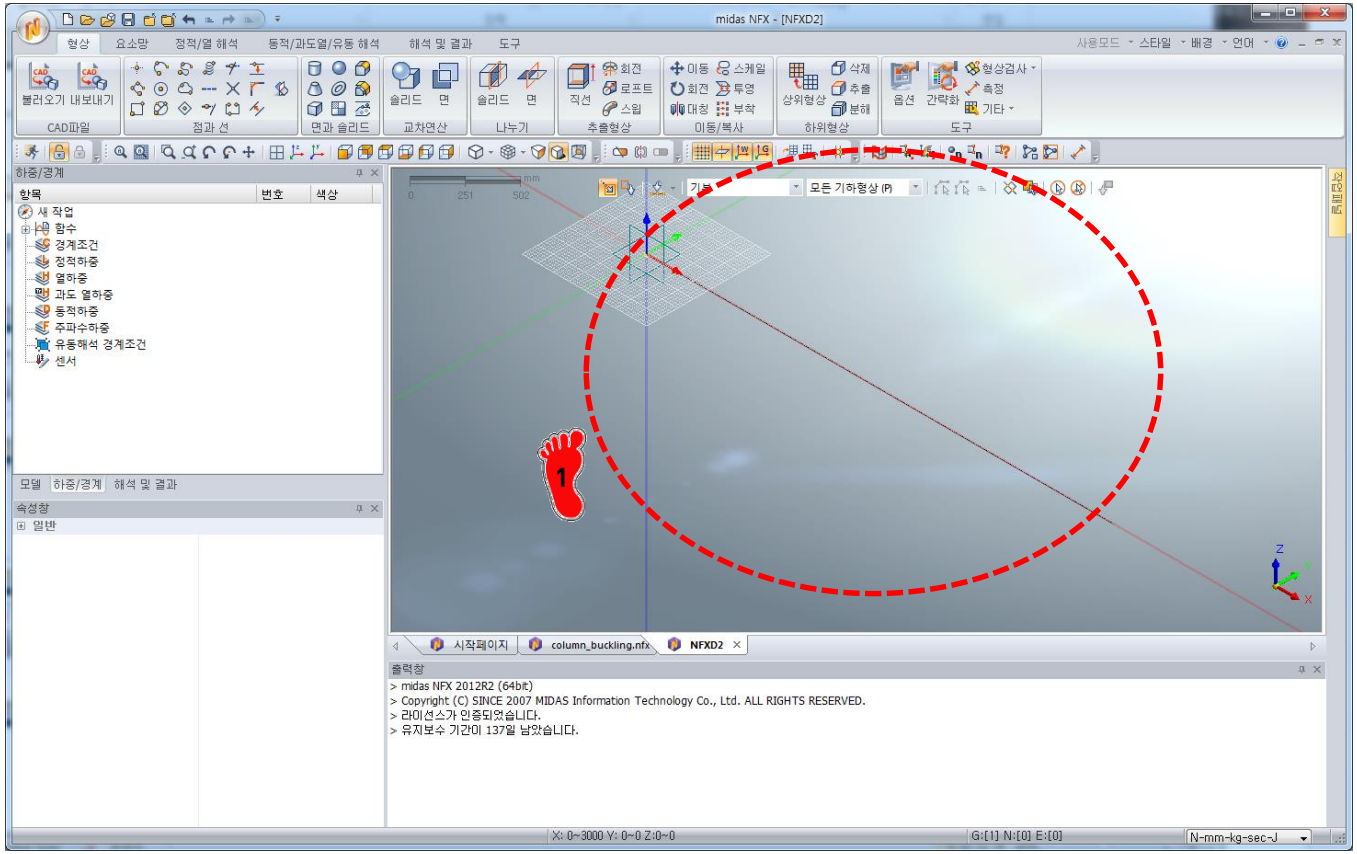


1. 새로 만들기 클릭
2. 3차원/일반모델 선택
3. 확인

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

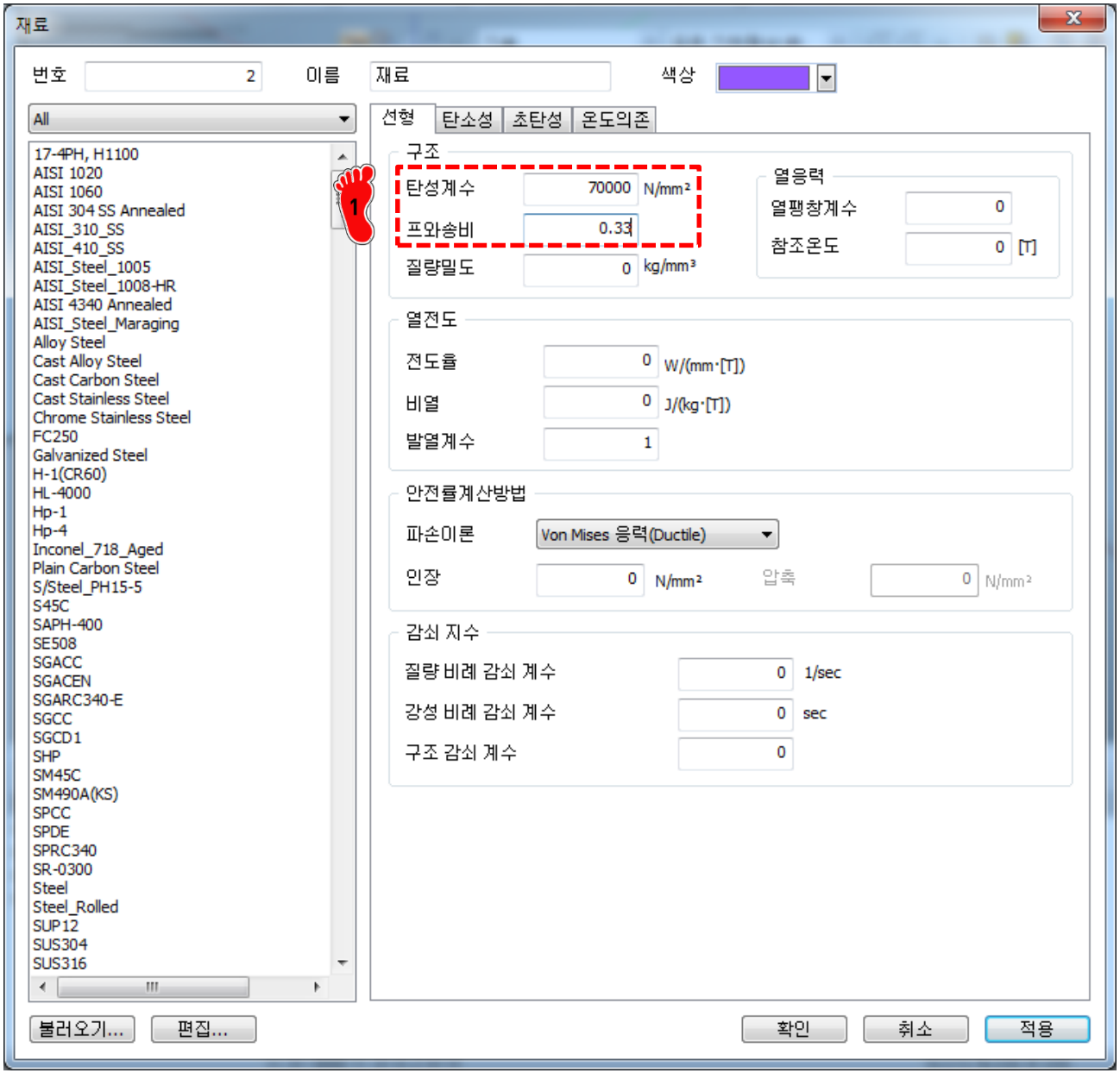
기하형상 생성 (2)

1 3000 mm 선 생성



Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

재료 물성 및 특성 입력 (1)

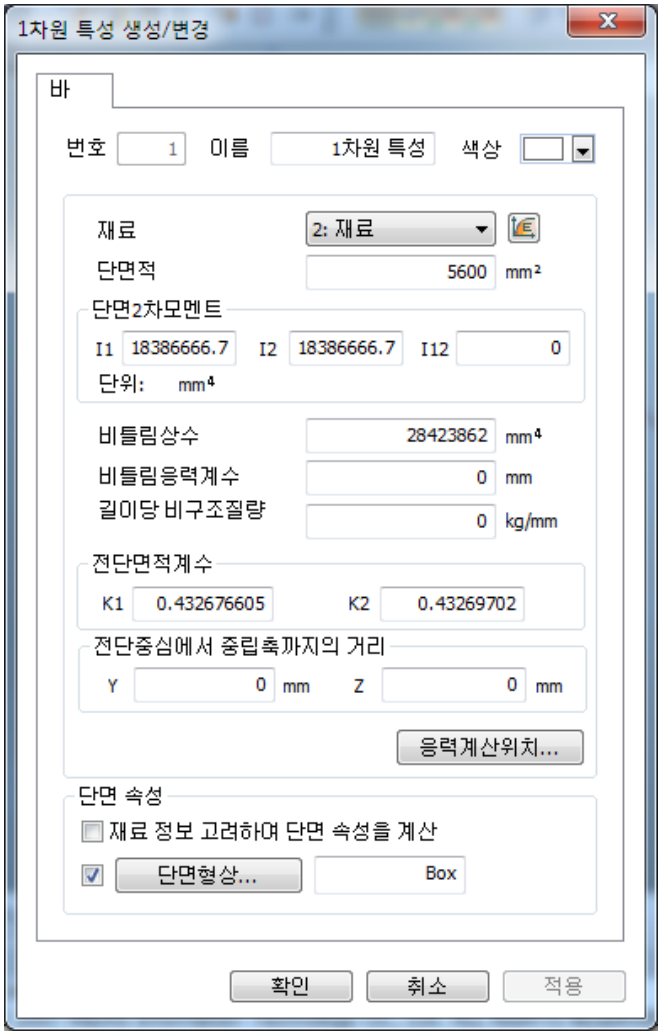


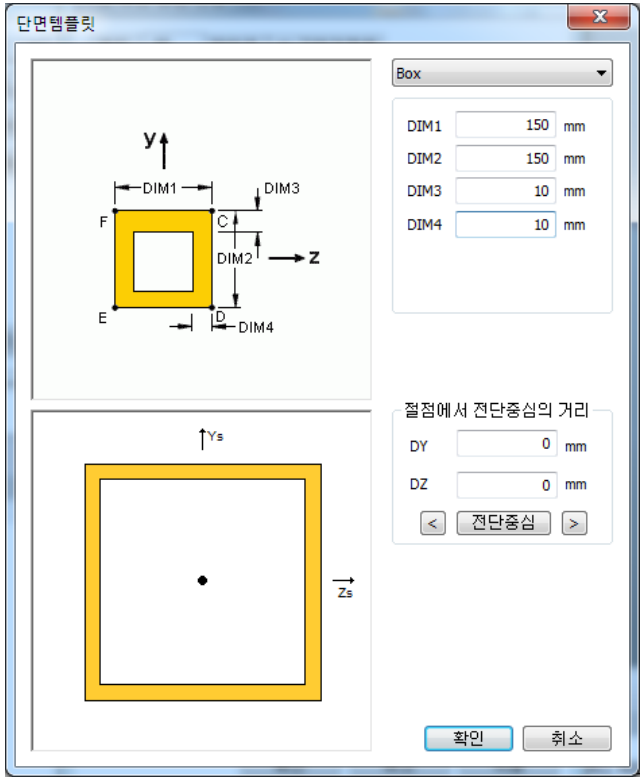
1 탄성계수 70 GPa
푸아송비 0.33
재료 생성

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

재료 물성 및 특성 입력 (2)

1 예제에서 주어진 기하 형상을 갖는 1차원 바 특성 생성

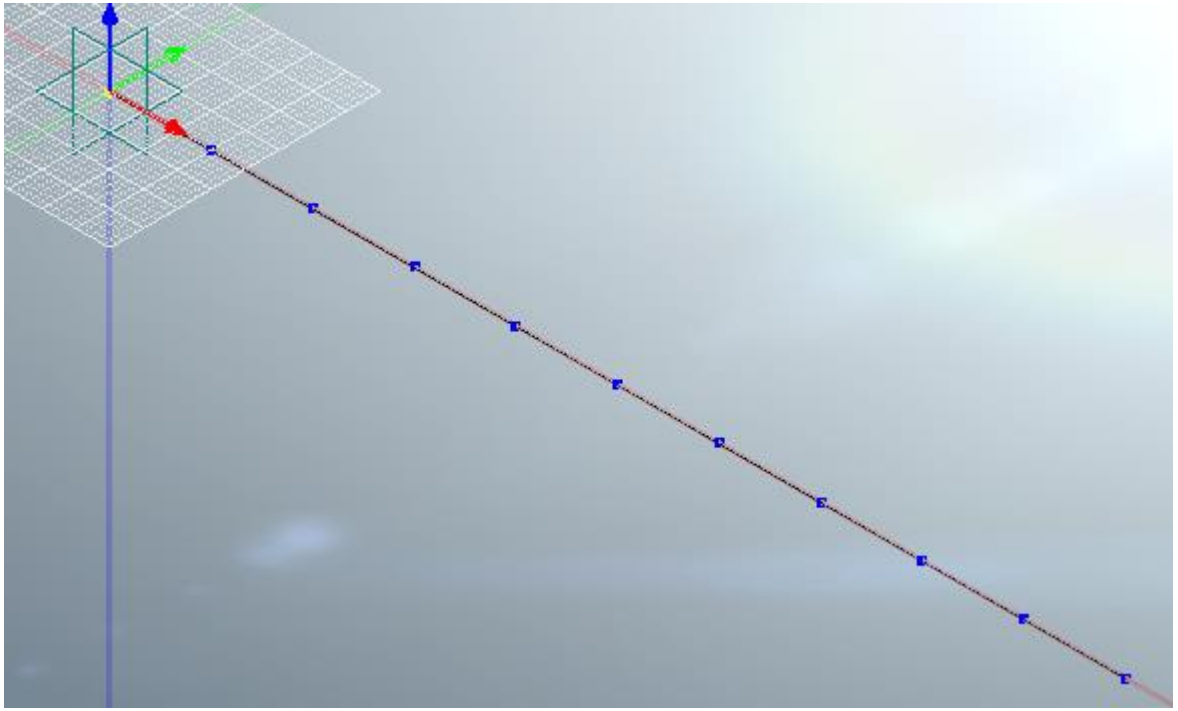




Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

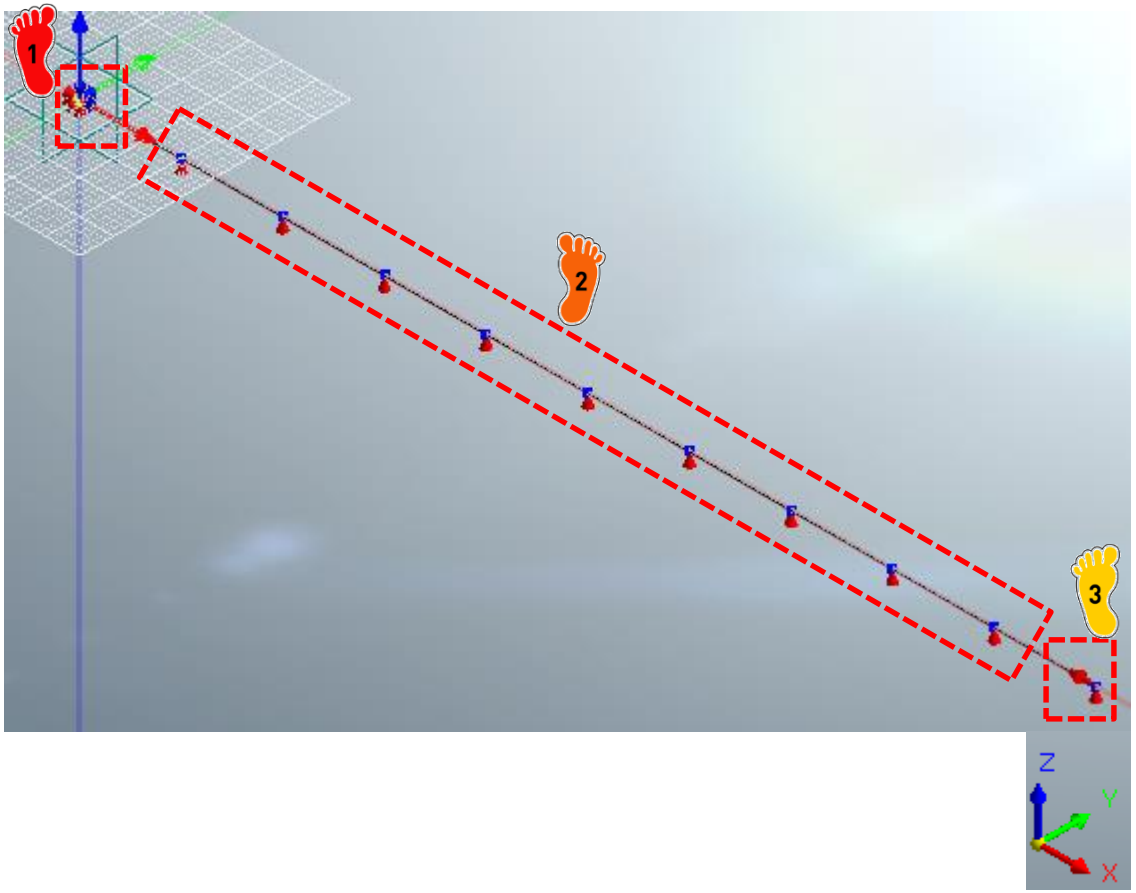
요소망 생성

1 요소망 생성



Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

구속조건 및 하중조건 설정



1 지지점 고정구속

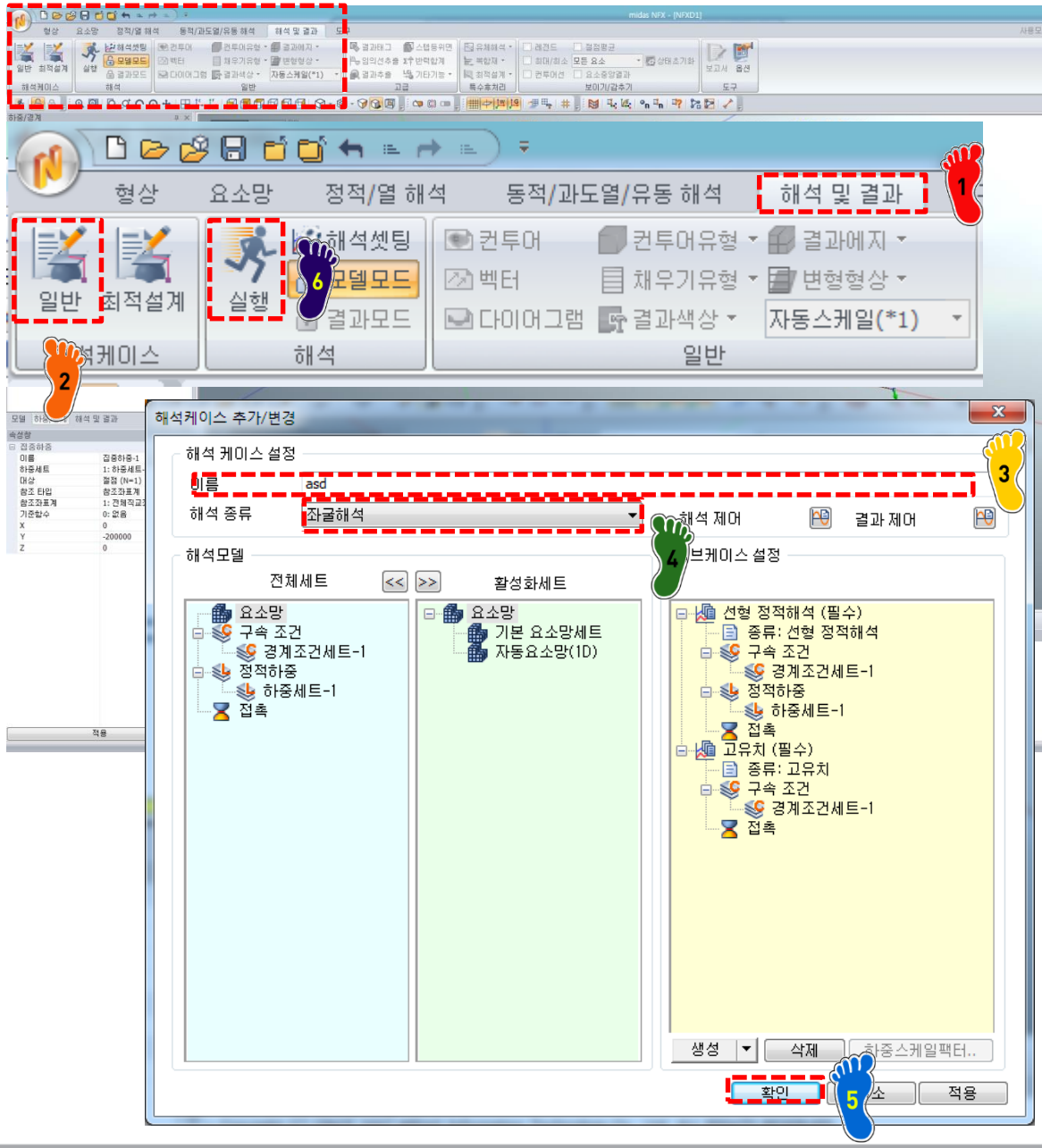
2 나머지 절점은 평면 거동을 할 수 있도록 구속
여기서는 z 방향을 구속해서 xy 평면에서만 움직일 수 있도록 함

3 하중 방향을 제외하고 구속 (Ty, Tz 구속)

4 하중은 고정구속 반대편 끝 부분에 160e3 N 압축하중 적용

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

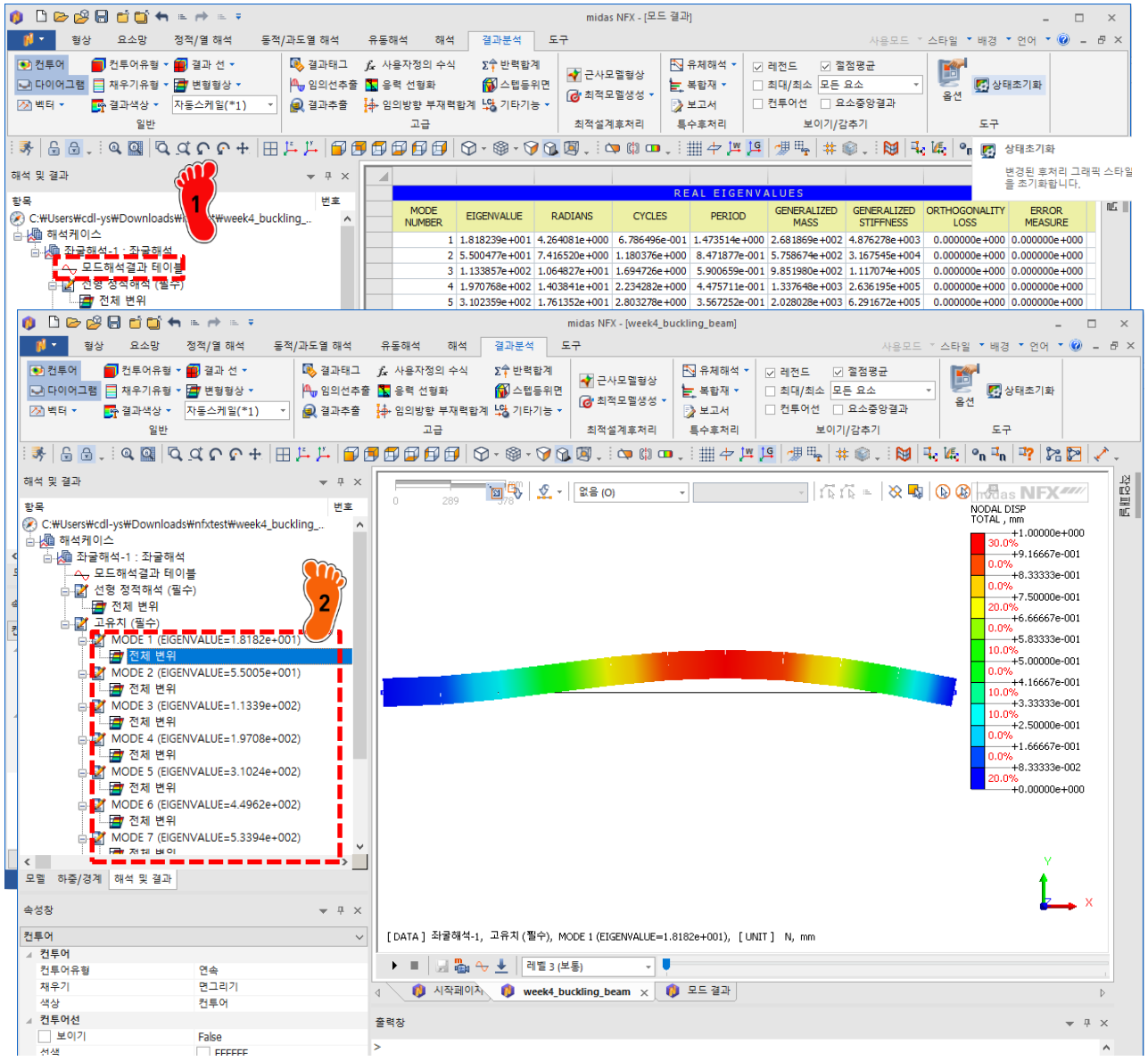
해석 케이스 정의 및 해석 실행



1. 주 메뉴 창에서 해석 및 결과 탭메뉴 클릭
2. 일반 클릭
3. 임의의 이름 입력
4. 좌굴해석으로 변경
5. 확인
6. 실행 클릭

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

해석 결과

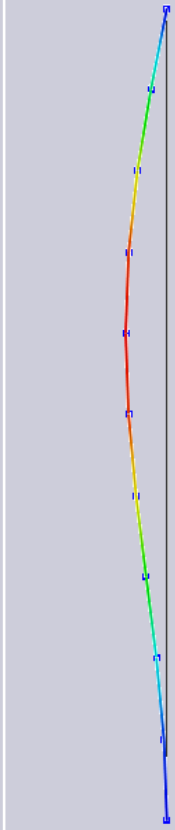
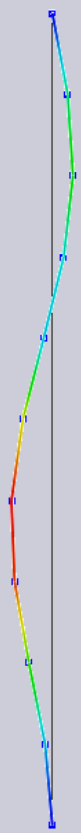
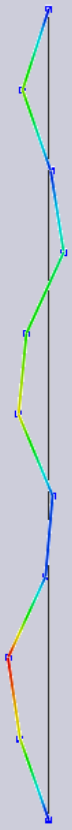


1. 고유치 값을 테이블로 확인 가능

2. 모드 변화 확인 가능

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

후처리

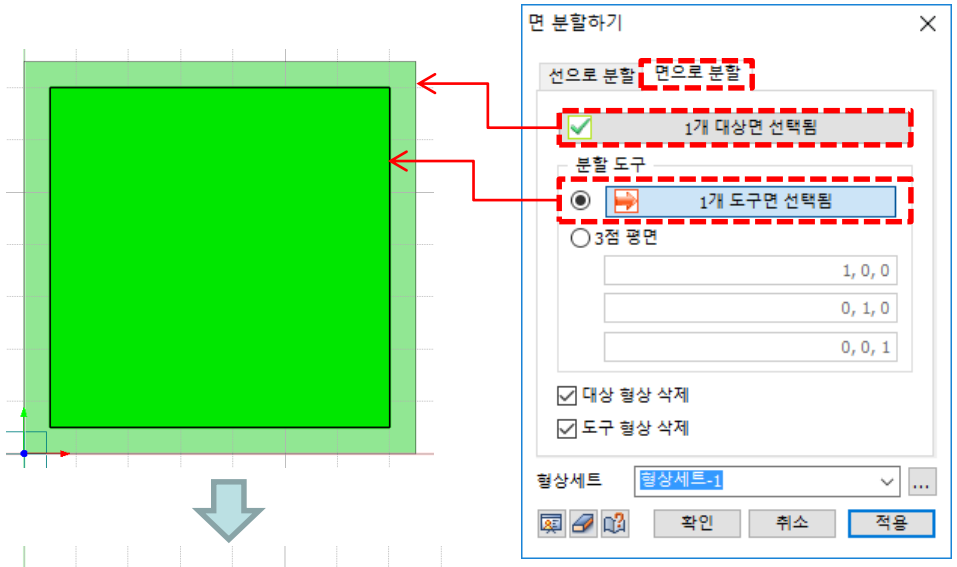
모드 차수	1	2	3	4	5
모드 형상					
고유값	1.8182e0	5.5005e1	1.1339e2	1.9708e2	3.1024e2
임계 하중 kN	2909	8801	18142	31532	49638

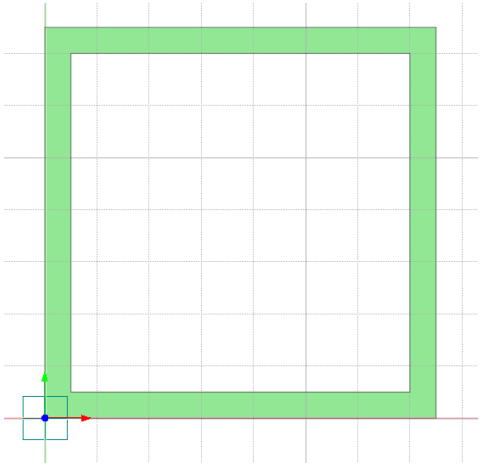
Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

COLUMN BUCKLING
솔리드 요소

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

기하형상 생성



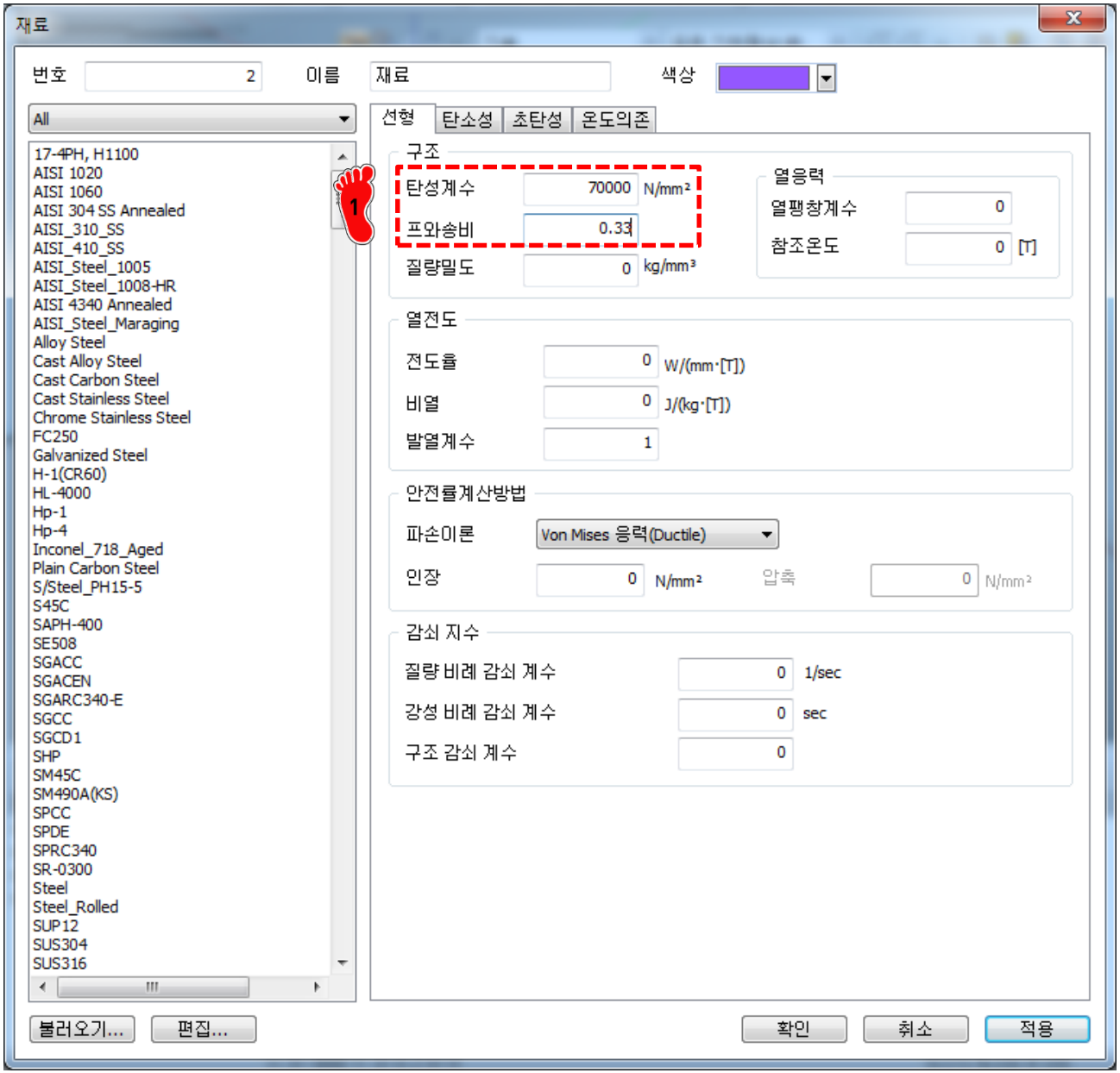


1. 두 개의 사각 단면 생성 (길이 150mm/130mm)

2. 면 나누기 기능을 이용하여 외부 사각형에서 내부 사각형 제거

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

재료 물성 및 특성 입력

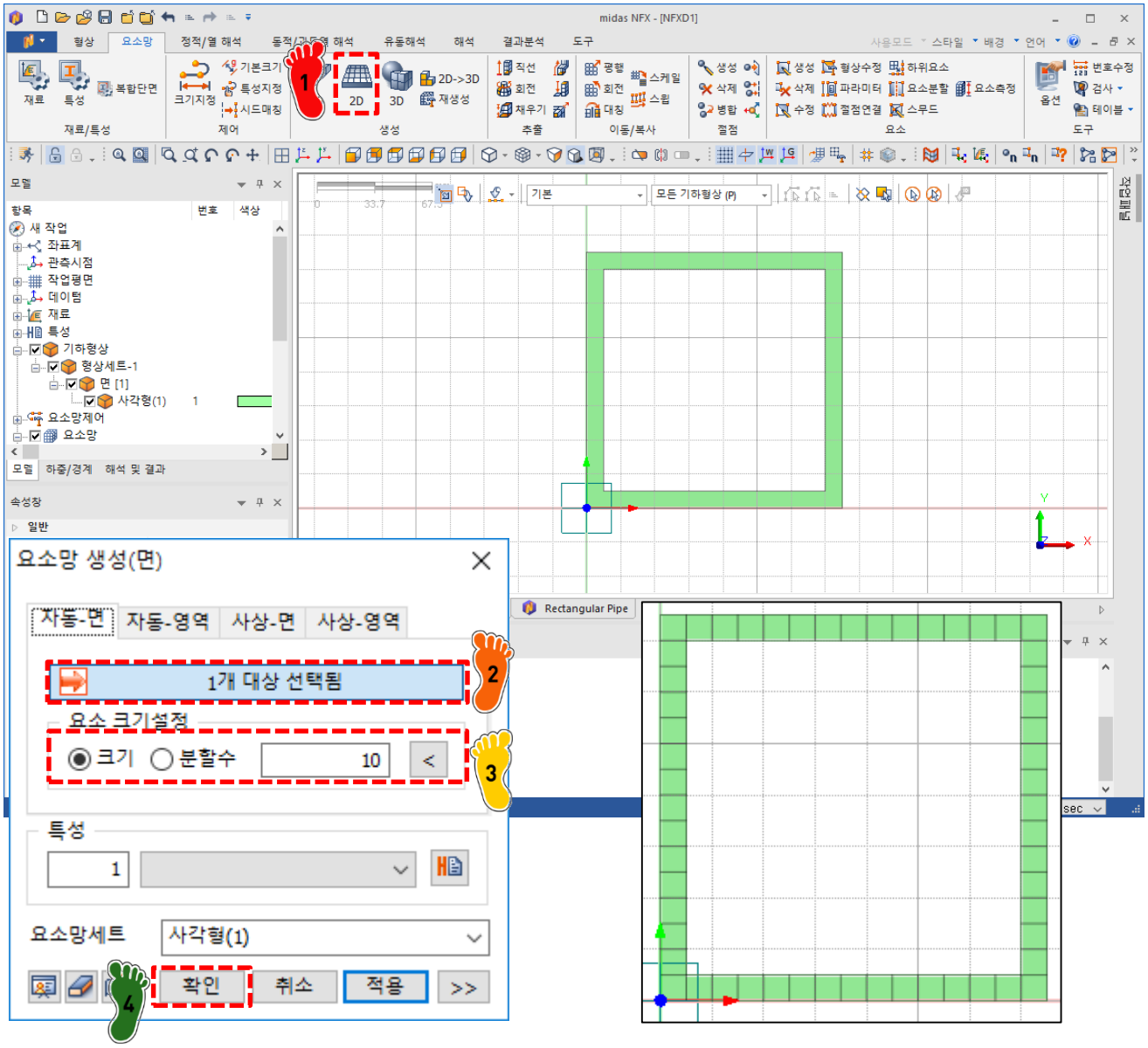


1 탄성계수 70 GPa
푸아송비 0.33
재료 생성

3차원 특성 생성

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

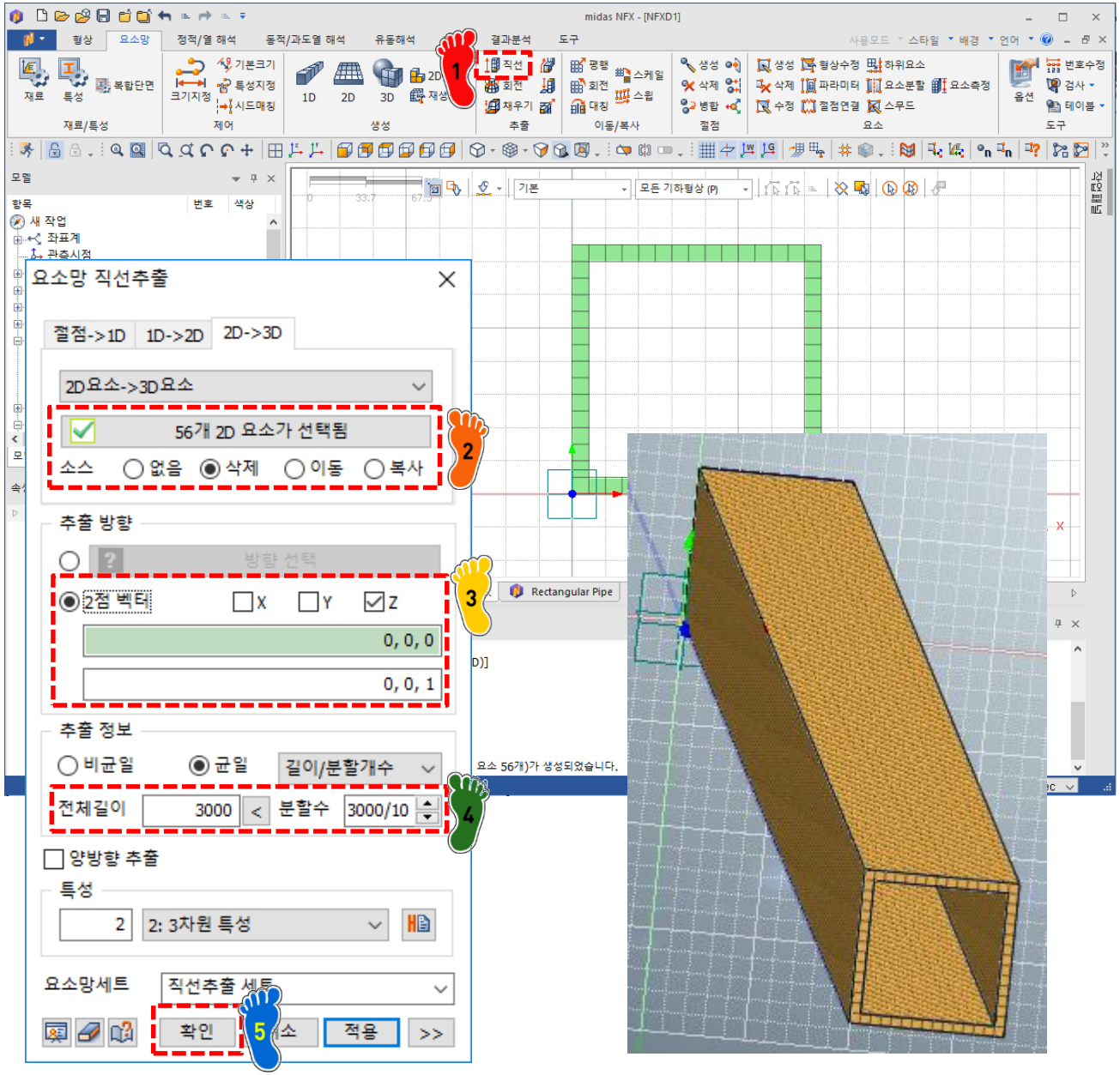
요소망 생성 (1)



1. 요소망 탭메뉴의 2D 클릭
2. 면 선택
3. 크기 10 입력
4. 확인

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

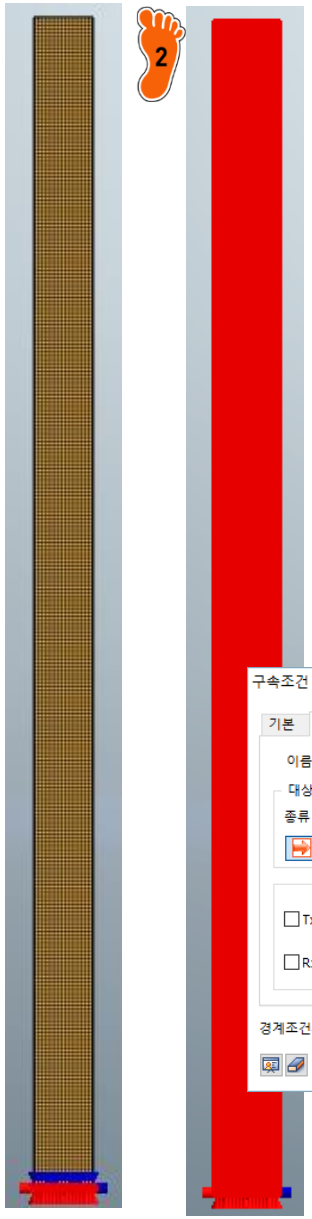
요소망 생성 (2)

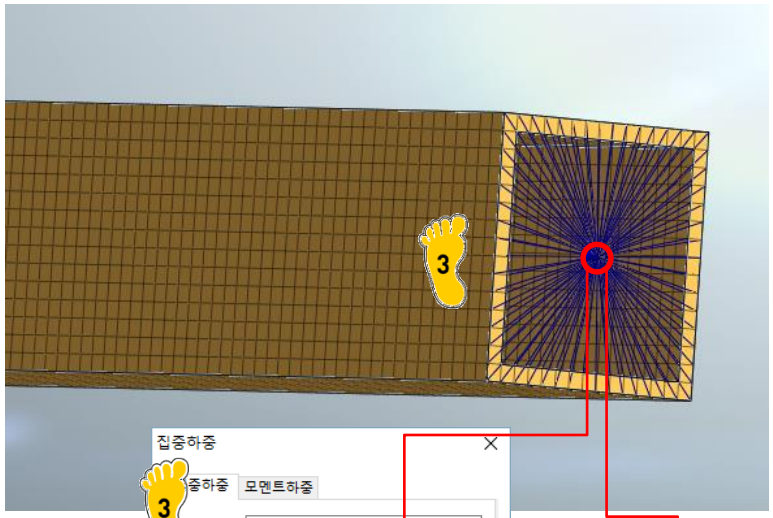


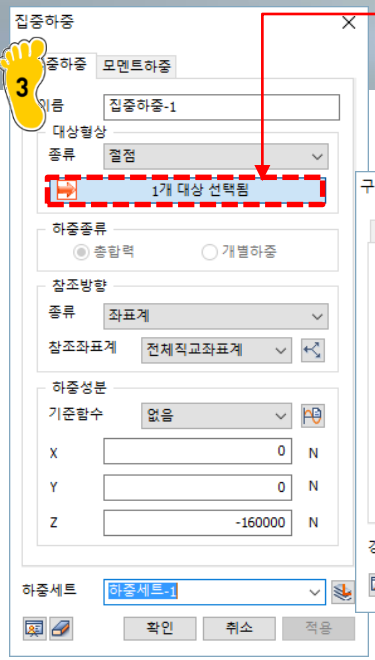
1. 요소망 탭메뉴의 직선 클릭 (곡선 추출의 경우 스윕)
2. 끝 면의 요소 56개 선택 (소스: 삭제)
3. 추출 방향 선택 가이드 곡선 선택 (Z 방향)
4. 전체길이 3000, 분할수 3000/10 입력
5. 확인

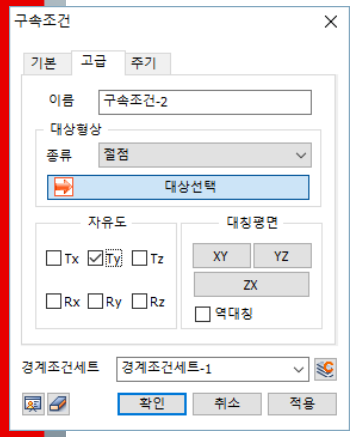
Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

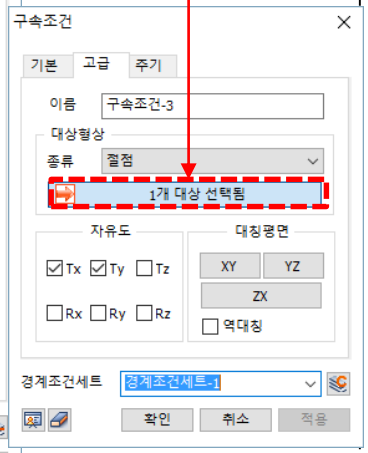
하중조건 및 구속조건 설정





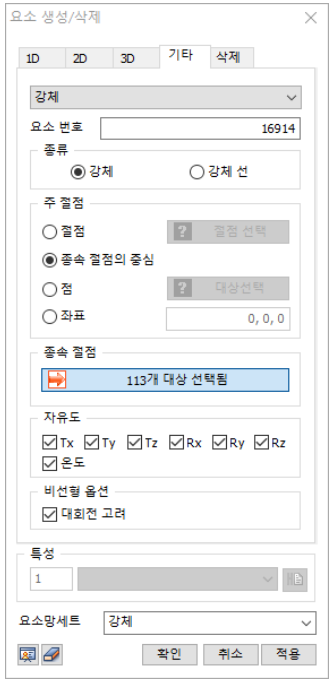






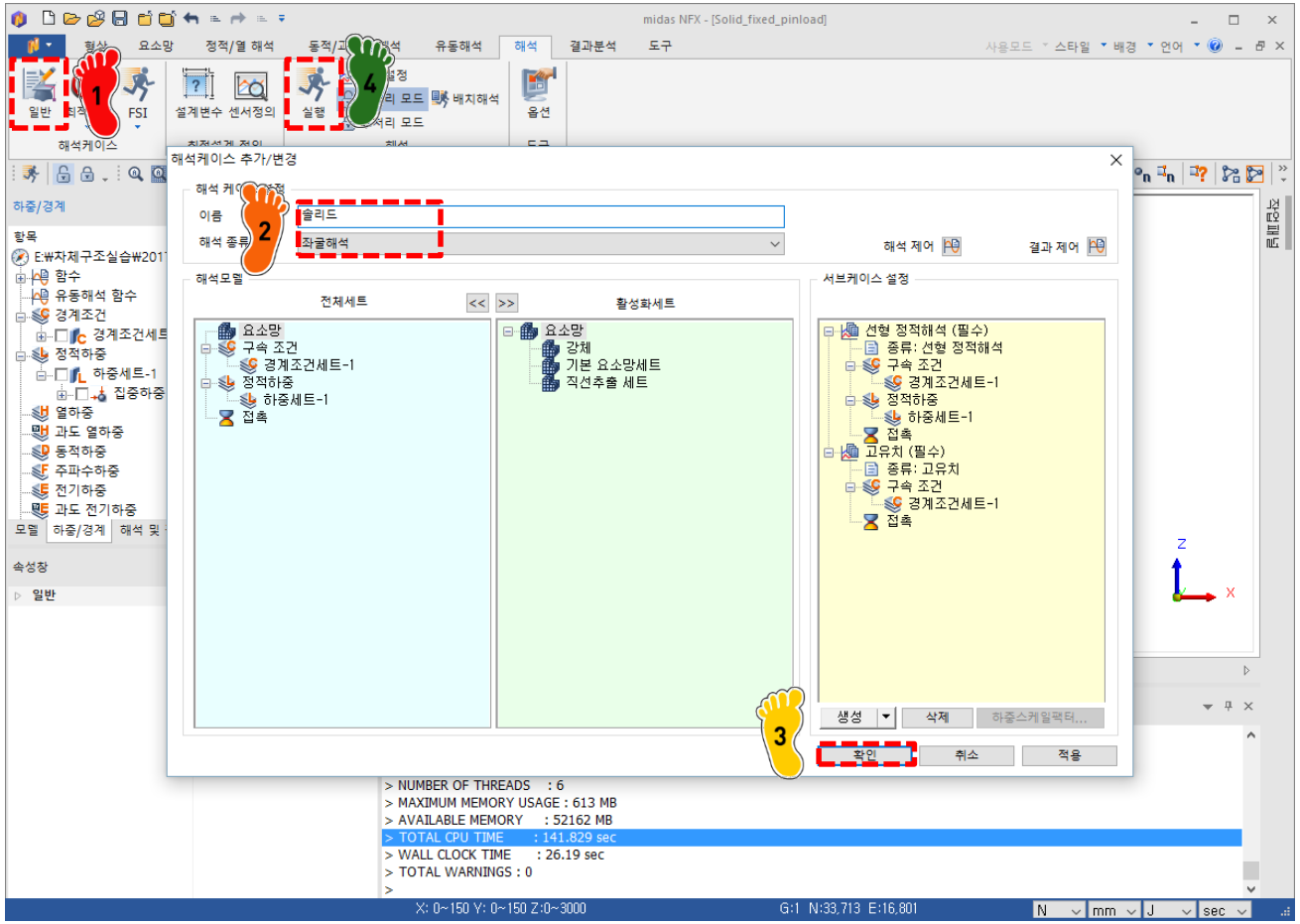
z방향으로만 움직이게 하기 위함

1. 하단의 절점 고정구속
2. 평면 거동을 위해 제일 상단 하중을 줄 절점들을 제외하고 y방향 구속 (상단 제외)
3. 제일 상단에 강체 요소 생성 후 중심에 하중/구속조건 부여
(강체: 요소망→생성→기타)



Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

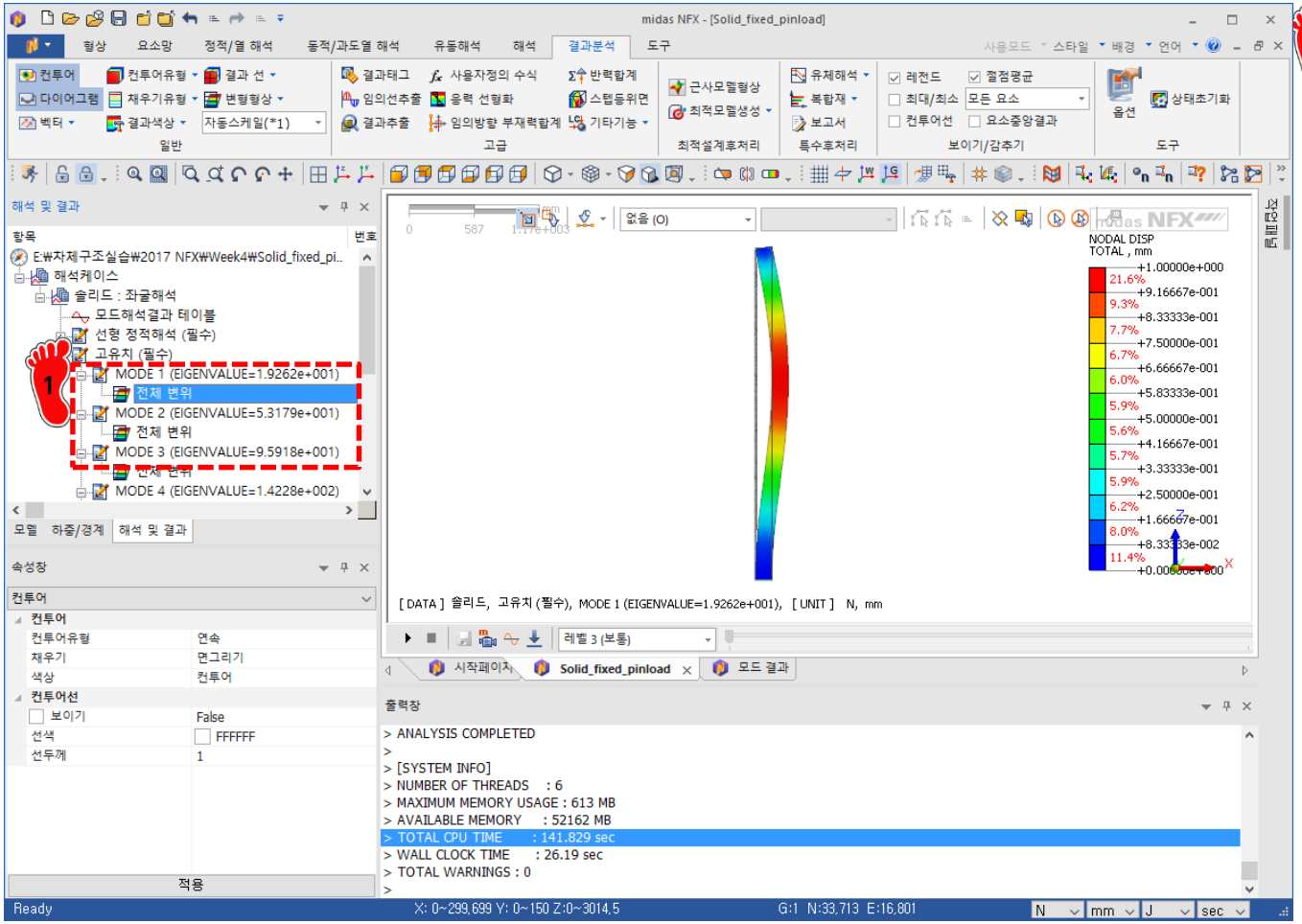
해석 케이스 정의 및 해석 실행



1. 주 메뉴 창에서 해석 탭메뉴에서 일반 클릭
2. 임의의 이름 입력 후 좌굴해석 선택
3. 확인
4. 실행 클릭

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

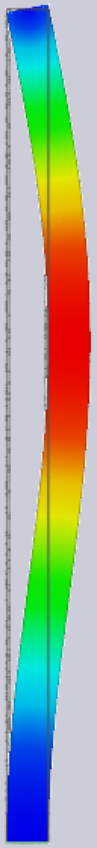
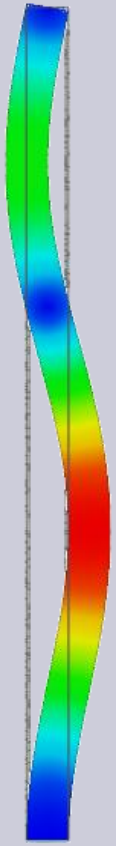
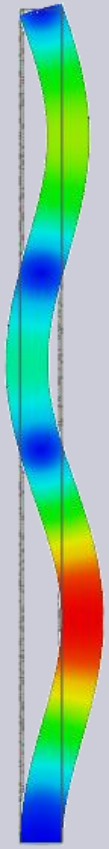
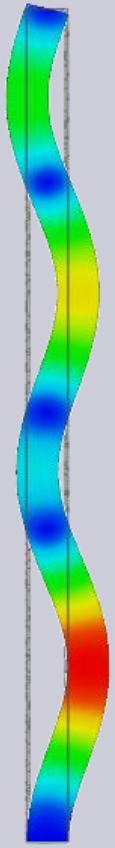
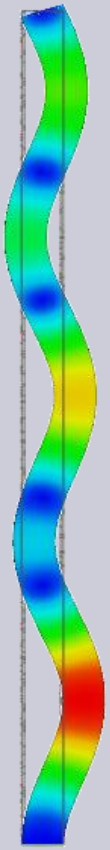
좌굴 해석 결과



1 각 모드에 대한 고유치 및 변형 결과 확인

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

후처리

모드 차수	1	2	3	4	5
모드 형상					
고유값 (λ)	1.926e1	5.318e1	9.592e1	1.423e2	1.875e2
임계 하중 [kN] ($P_{cr} = P \times \lambda$)	3082	8509	15347	22765	29997

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

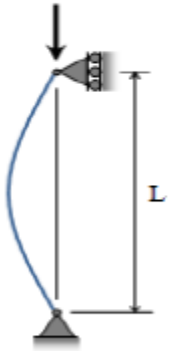
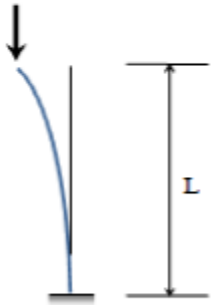
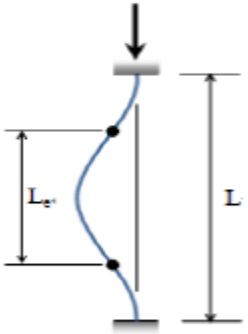
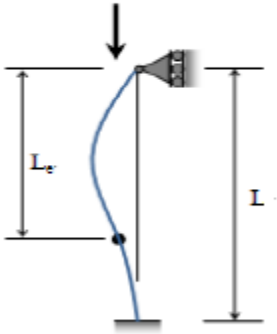
결과 정리

unit : kN	1차		2차		3차		4차		5차	
이론	2883		8533		17003		28295		42409	
빔 (10)	2909	0.9	8801	3.1	18142	6.7	31532	11.4	49638	17.0
빔 (20)	2885	0.1	8587	0.6	17285	1.7	29136	3.0	44251	4.3
솔리드	3082	6.9	8509	0.3	15347	9.7	22765	19.5	29997	29.3

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

숙제

양단 핀지지일 때 3가지 요소의 좌굴하중(5차까지)을 구하고
해석적인 해와 비교, 고찰하시오

양단 핀지지	상단자유, 하단고정	양단 고정	상단핀지지, 하단고정
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046\pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = L$	$L_e = L$	$L_e = L$
$K = 1$	$K = 1$	$K = 1$	$K = 1$

$$P_{cr} = EI\alpha^2, \alpha = \frac{\pi}{L}k, k = 1,2,3,\ldots$$

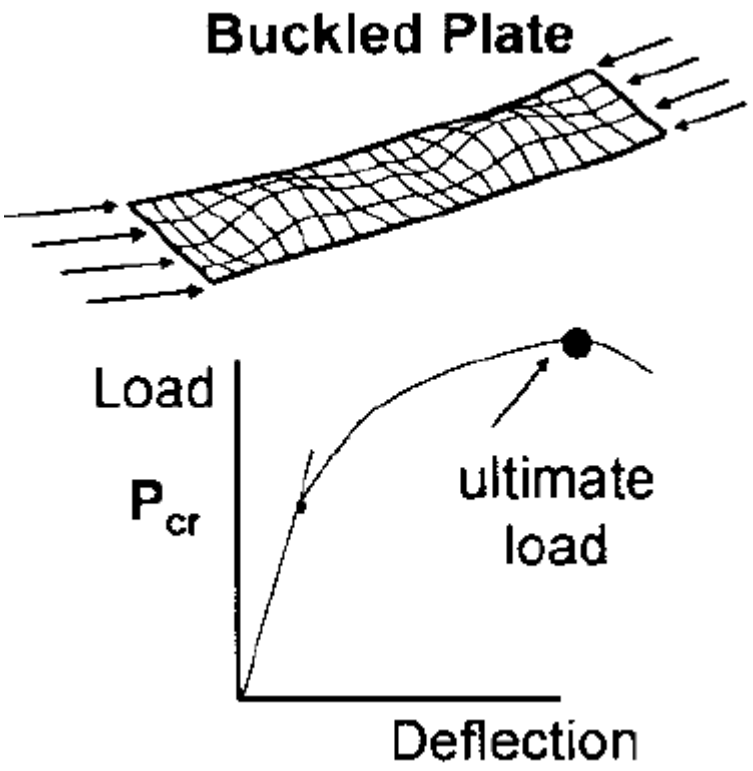
Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

PANEL BUCKLING
쉘 요소

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

예제: PANEL BUCKLING (1)

$$\sigma_{cr} = \frac{D\pi^2}{tb^2}k = \frac{E\pi^2}{12\left(1-\nu^2\right)\left(b/t\right)^2}k$$



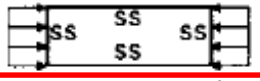
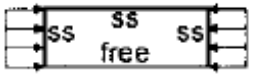
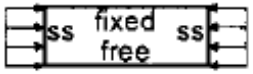
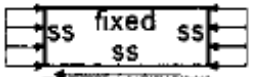
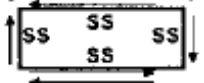
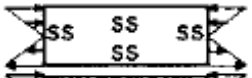
Case	Boundary Condition	Loading	k
(a)	ss ss ss ss	Compression	4.0
(b)	ss fixed ss fixed	Compression	6.97
(c)	ss ss ss free	Compression	0.425
(d)	ss fixed ss free	Compression	1.277
(e)	ss fixed ss ss	Compression	5.42
(f)	ss ss ss ss	Shear	5.34
(g)	ss fixed ss free	Shear	8.98
(h)	ss ss ss ss	Bending	23.9
(i)	fix fixed fix fixed	Bending	41.8

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

예제: PANEL BUCKLING (2)

$$\sigma_{cr} = \frac{D\pi^2}{tb^2}k = \frac{E\pi^2}{12\left(1-\nu^2\right)\left(b/t\right)^2}k$$

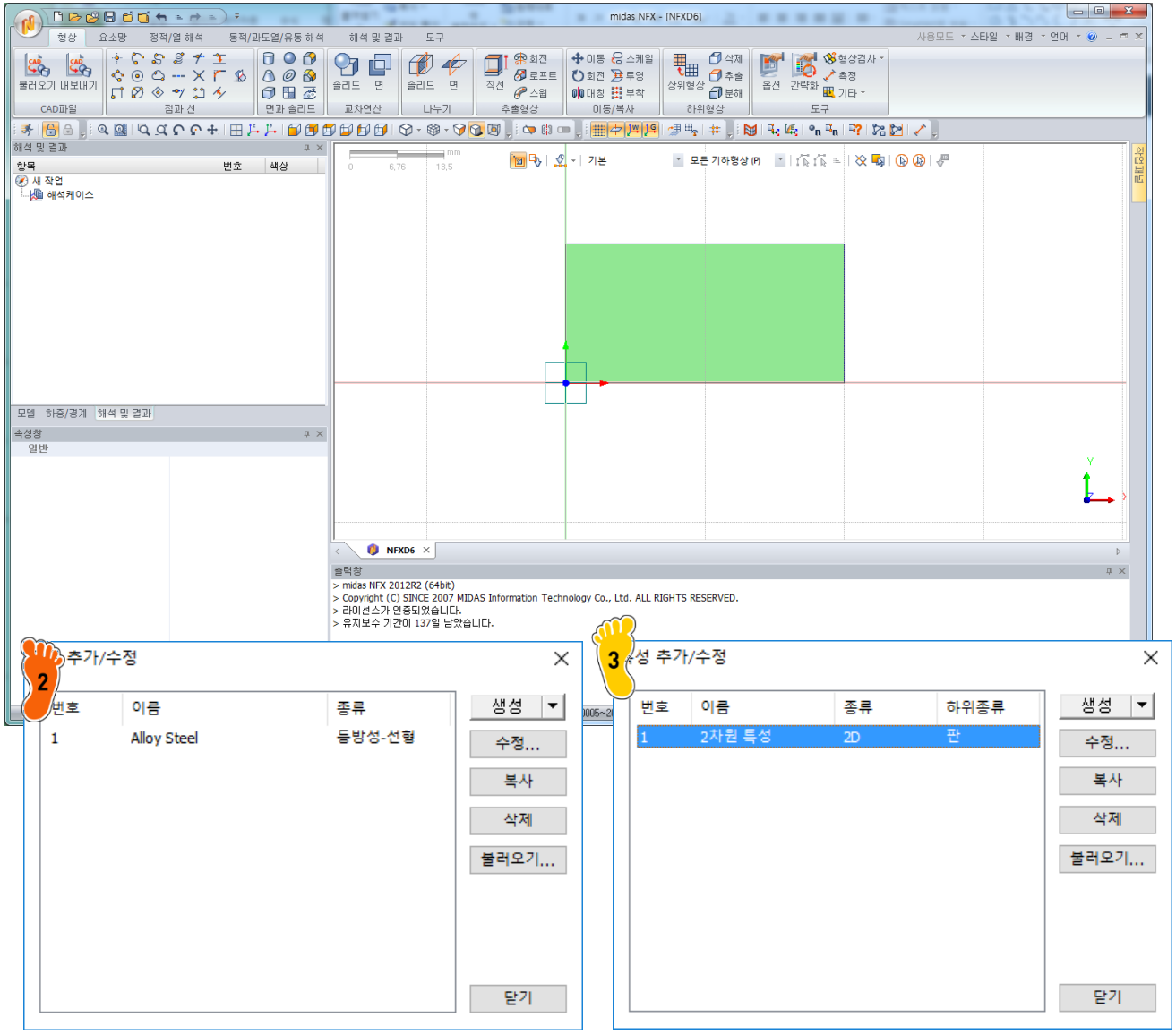
$$E = 210\ \text{GPa}, \nu = 0.28, b = 20\ \text{mm}, t = 1\ \text{mm}$$

Case	Boundary Condition	Loading	k
(a)		Compression	4.0
(b)		Compression	6.97
(c)		Compression	0.425
(d)		Compression	1.277
(e)		Compression	5.42
(f)		Shear	5.34
(g)		Shear	8.98
(h)		Bending	23.9
(i)		Bending	41.8

$$\sigma_{cr} = 1874\ \text{MPa},\ P_{cr} = \sigma_{cr}A = \sigma_{cr}bt = 37482N$$

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

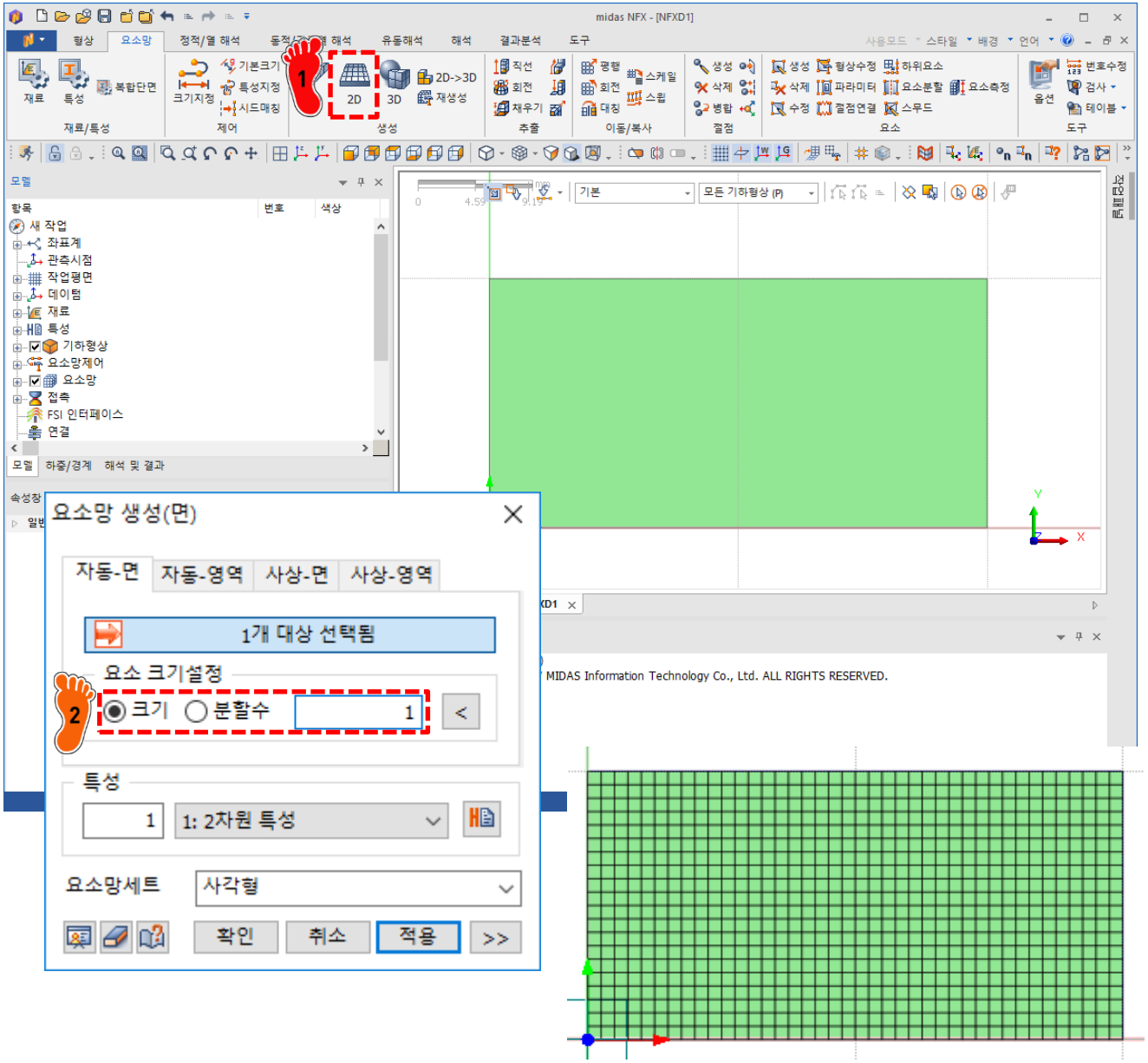
기하형상 생성 및 재료/특성 설정



1. 가로 40 mm 세로 20 mm 평판 생성
2. 재료는 Alloy Steel 그대로 사용
3. 두께 1mm의 2차원 특성 생성

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

요소망 생성

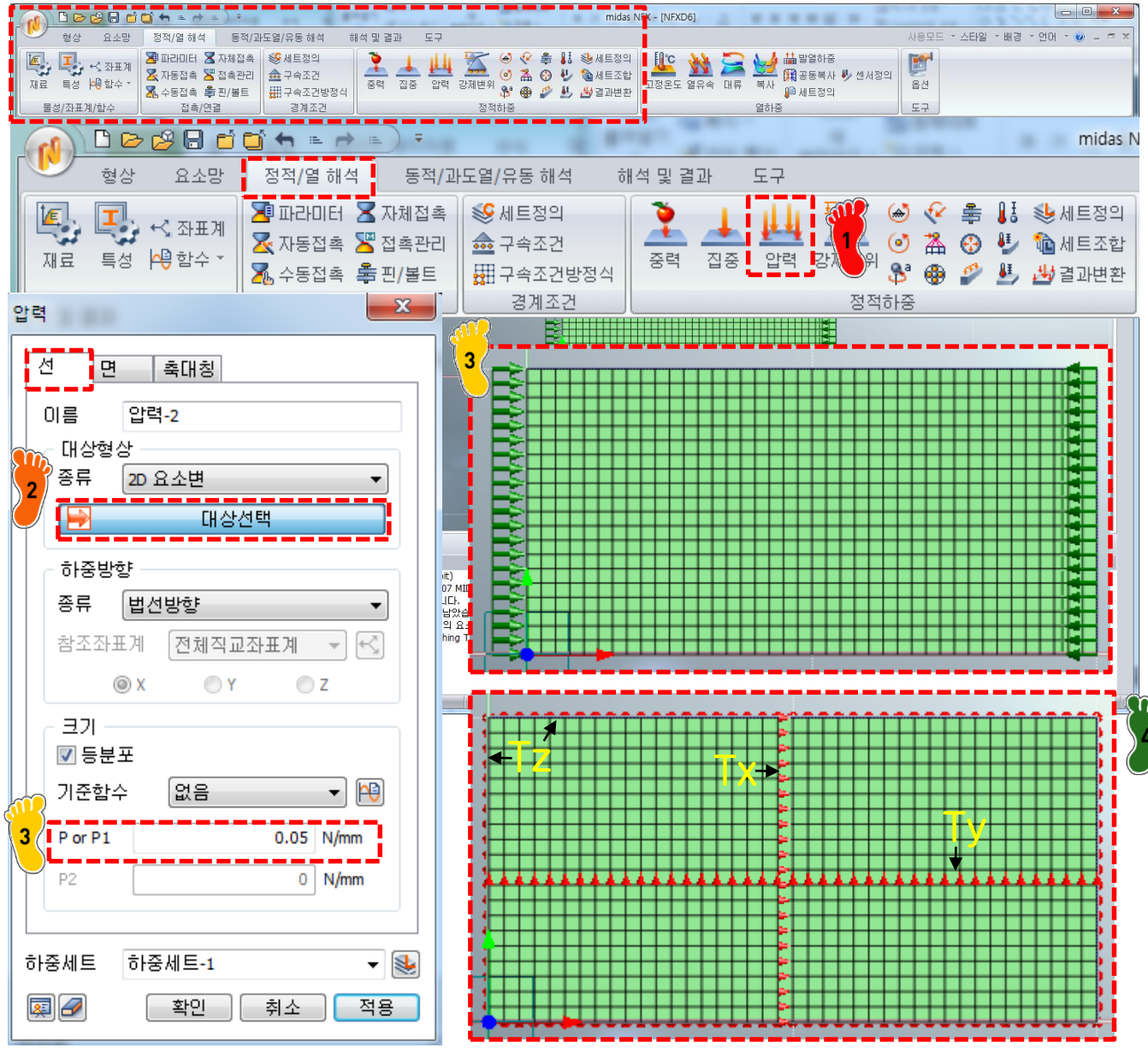


1 요소망 탭메뉴의 2D 클릭

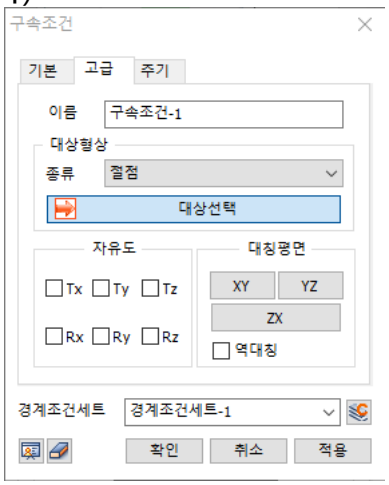
2 크기 1로 요소 생성

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

구속조건 및 하중조건 설정

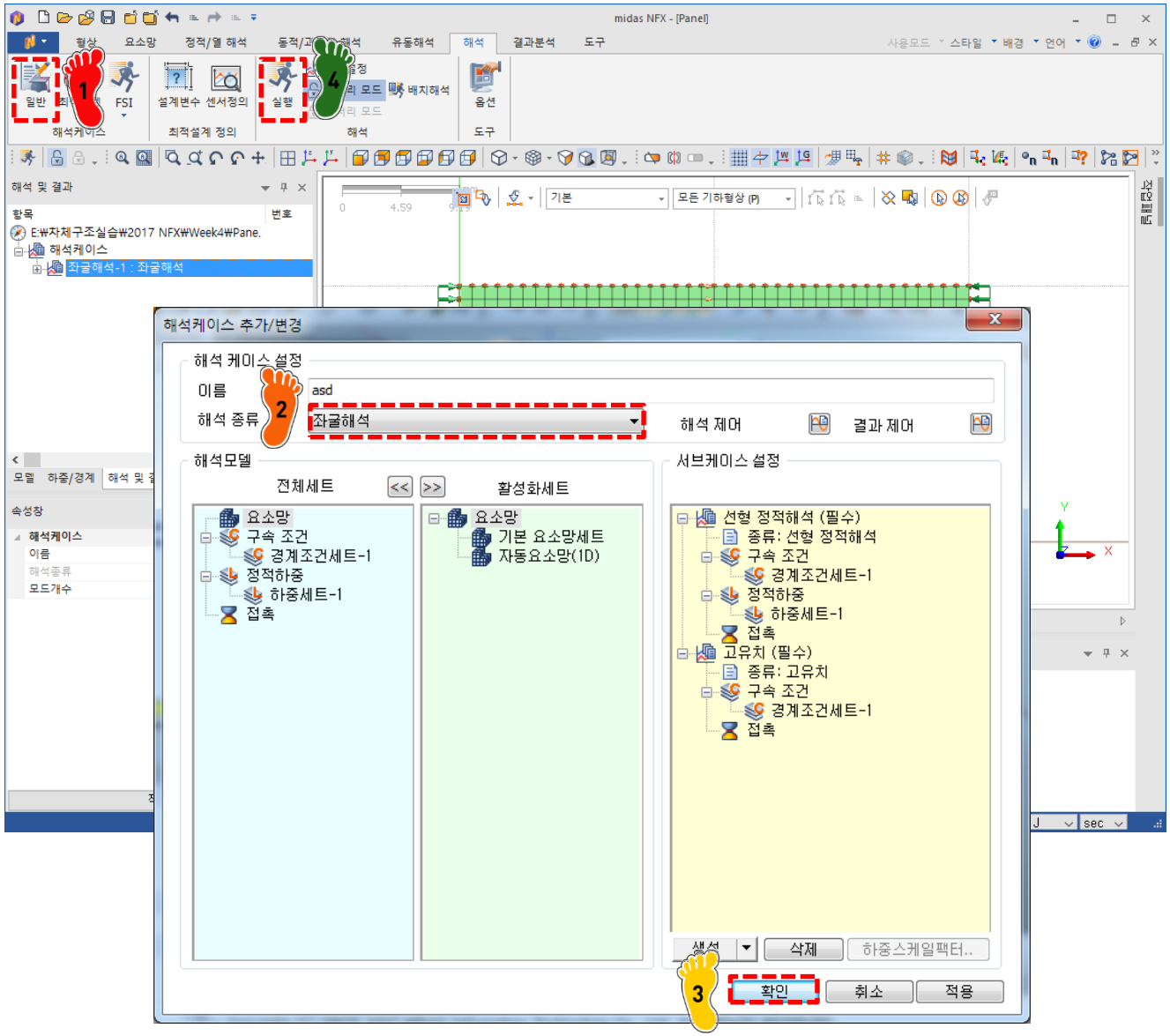


1. 정적/열 해석 탭메뉴에서 압력 클릭
2. 선 탭메뉴에서 양 끝 하중을 가할 선 선택
3. 단위 길이당 하중이므로 단위하중이 입력되도록 0.05 입력
4. 구속조건의 경우 최 외각 절점들은 Tz로 구속, 가운데 세로방향은 Tx, 가운데 가로방향은 Ty로 구속 (강체운동 방지)



Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

해석 케이스 정의 및 해석 실행



1 주 메뉴 창에서 해석 탭메뉴에서 일반 클릭

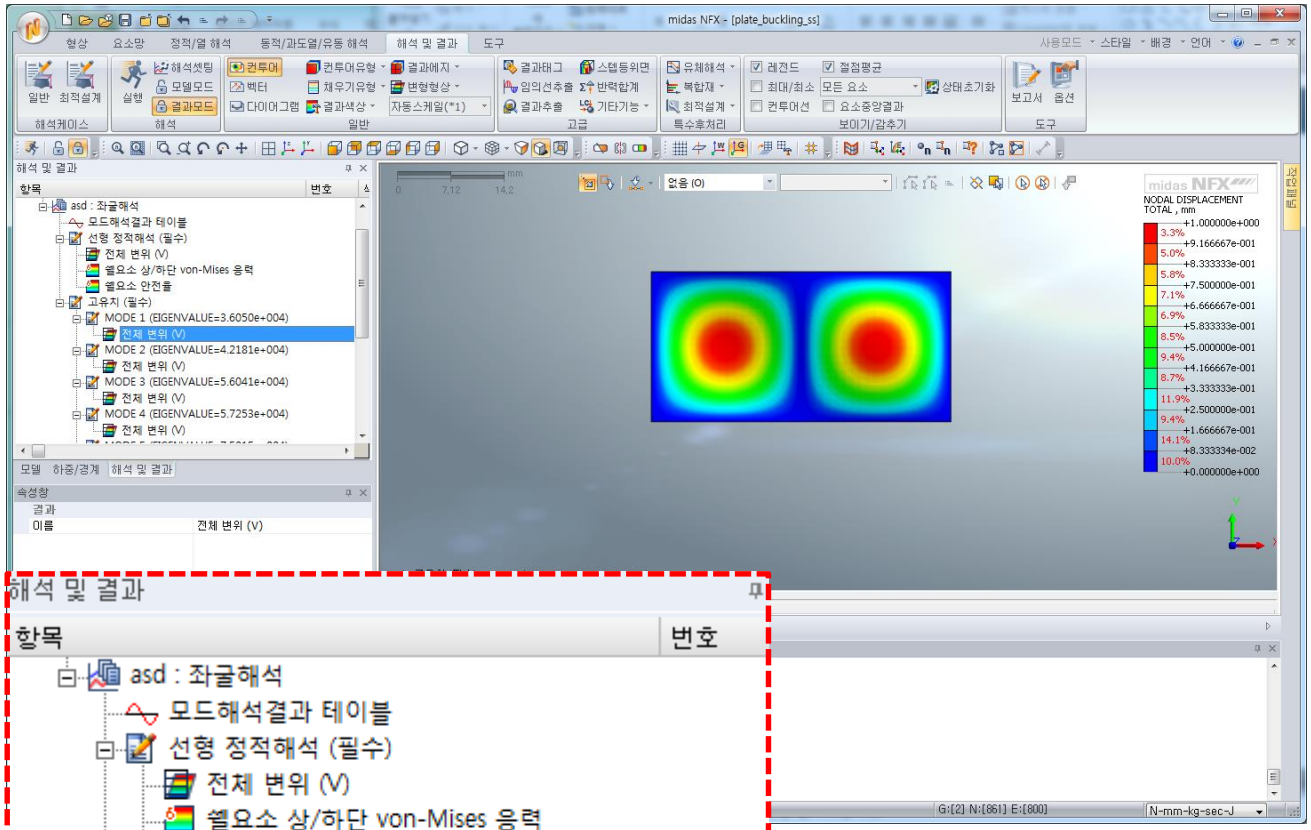
2 임의의 이름 입력 후 좌굴해석 선택

3 확인

4 실행 클릭

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

후처리



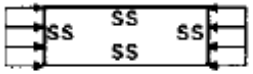
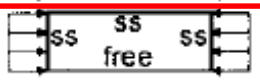
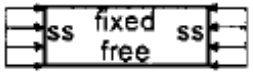
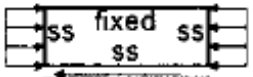
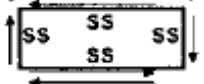
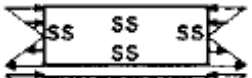
1 첫 번째 고유값은 3.6050e4 임계 하중은 고유값 곱하기 가해준 하중이므로 3.6050e4이 임계하중

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

예제: PANEL BUCKLING (2)

$$\sigma_{cr} = \frac{D\pi^2}{tb^2}k = \frac{E\pi^2}{12\left(1-\nu^2\right)\left(b/t\right)^2}k$$

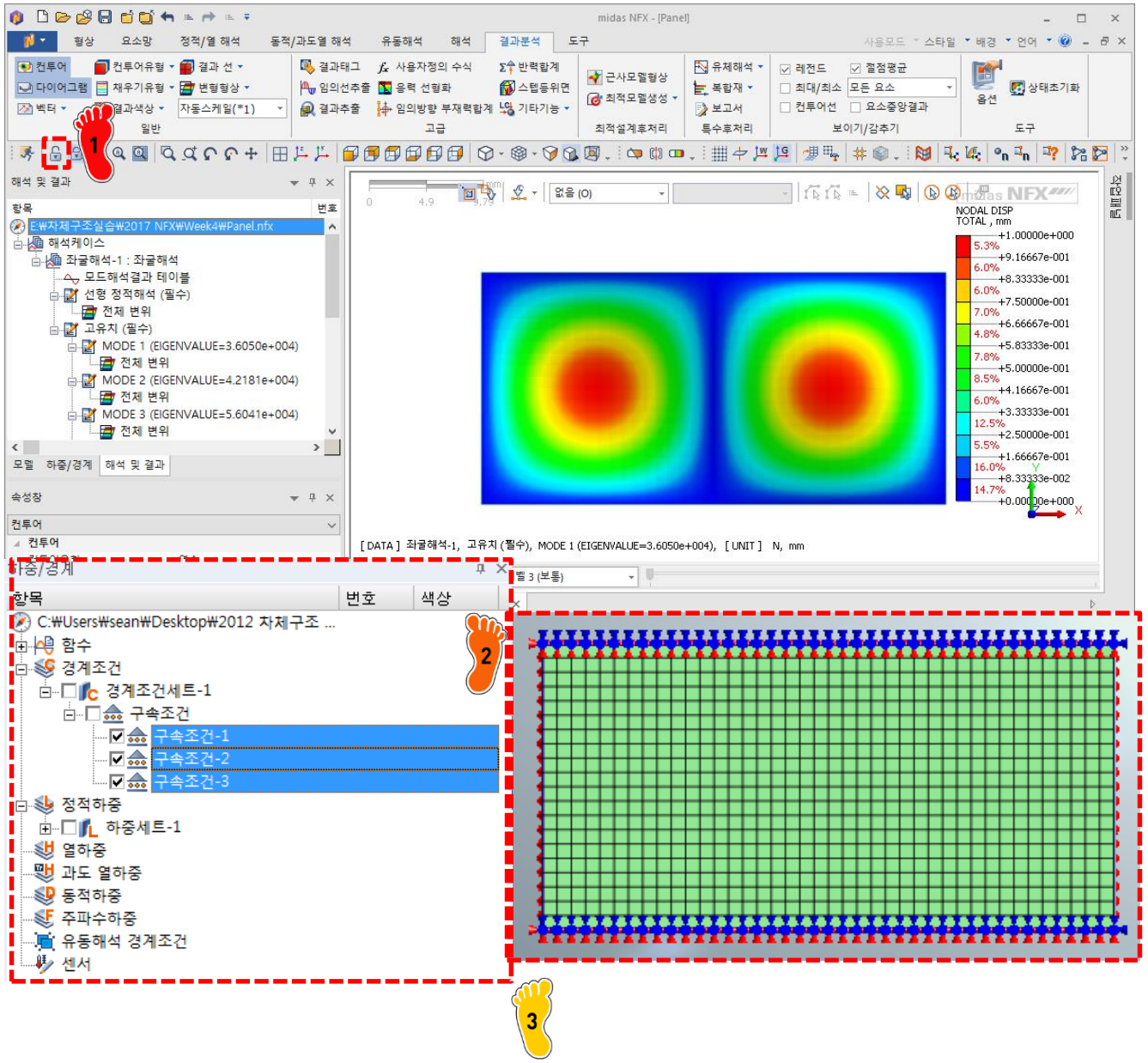
$$E = 210\ \text{GPa}, \nu = 0.28, b = 20\ \text{mm}, t = 1\ \text{mm}$$

Case	Boundary Condition	Loading	k
(a)		Compression	4.0
(b)		Compression	6.97
(c)		Compression	0.425
(d)		Compression	1.277
(e)		Compression	5.42
(f)		Shear	5.34
(g)		Shear	8.98
(h)		Bending	23.9
(i)		Bending	41.8

$$\sigma_{cr} = 3266\ \text{MPa},\ P_{cr} = \sigma_{cr}A = \sigma_{cr}bt = 65313N$$

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

구속조건 및 하중조건 설정



1 모델모드로 변경

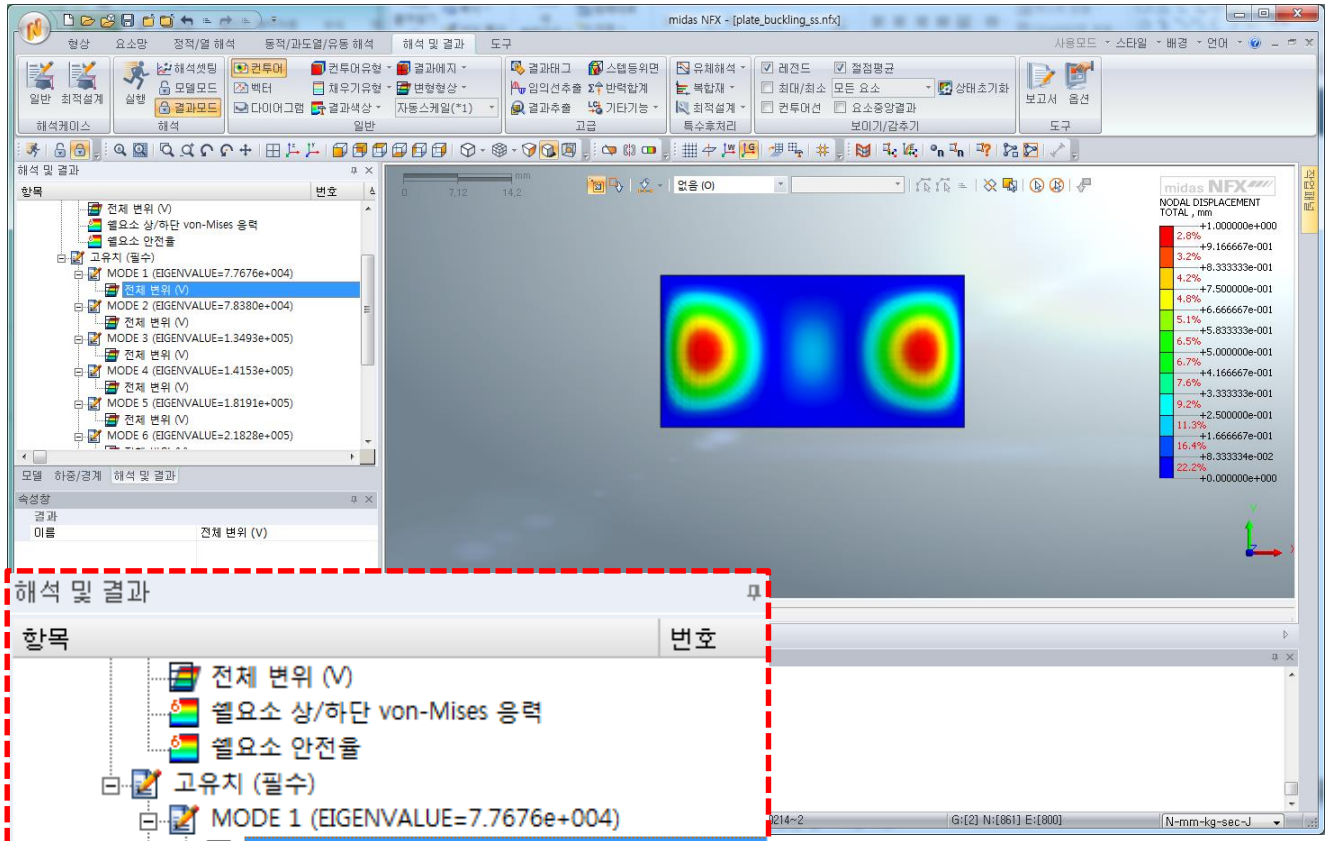
2 기존 구속조건 제거

3 새로운 구속조건 입력
- 위/아래: 고정구속
- 좌/우: 단순지지(Tz)

해석 재실행

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

후처리



1 첫 번째 고유값은 7.7676e4

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

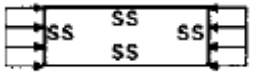
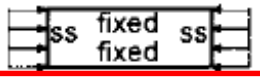
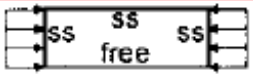
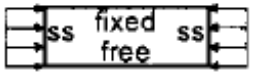
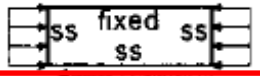
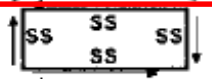
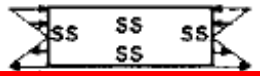
결과 정리

Analytic P_{cr} [N]	37482	65313
FEM P_{cr} [N]	36050	77676
Error [%]	3.8	18.93

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

숙제

3가지 경계 조건 및 하중 조건이 주어질 때 임계하중을 구하고 해석적인 해와 비교 고찰하시오

Case	Boundary Condition	Loading	k
(a)		Compression	4.0
(b)		Compression	6.97
(c)		Compression	0.425
(d)		Compression	1.277
(e)		Compression	5.42
(f)		Shear	5.34
(g)		Shear	8.98
(h)		Bending	23.9
(i)		Bending	41.8

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

접촉 해석

Computational Design Laboratory
Department of Automotive Engineering
Hanyang University, Seoul, Korea

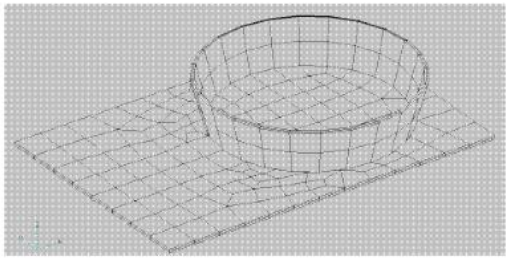
Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

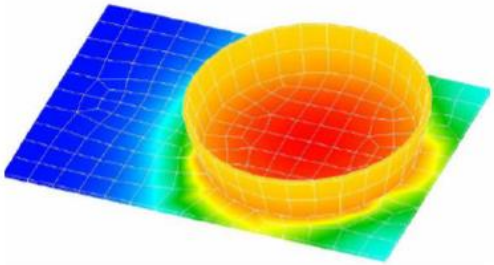
접촉 해석 (CONTACT ANALYSIS)

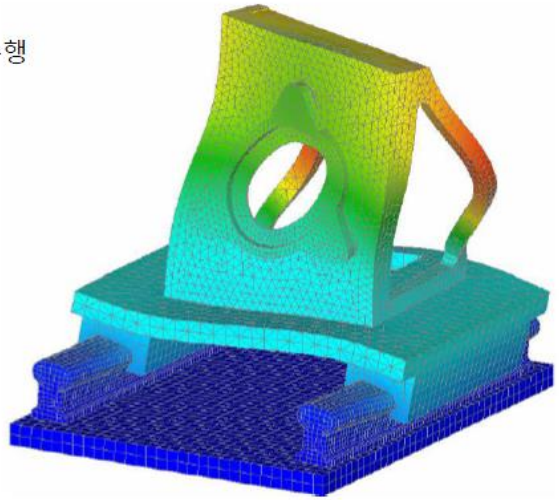
접촉의 이해 및 종류

➢ **접촉이란?**

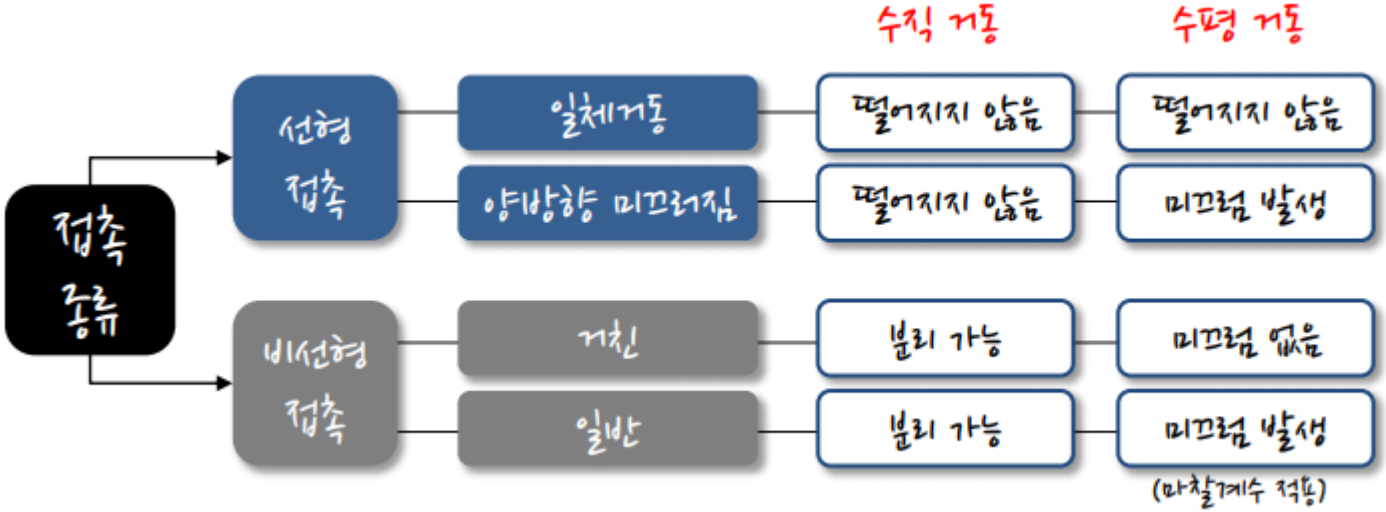
- 한 파트의 여러 절점을 다른 파트의 절점에 연결하는 것
- 주접촉면(Master)과 종속접촉면(Slave)의 절점 사이에서 Penalty Stiffness Method를 이용하여 접촉해석을 수행
- 발생 가능한 모든 자유도에서 접촉해석 수행 가능
- 접촉면 사이에서 절점이 일치하지 않는 경우에도 해석이 가능
- 선형 해석 및 비선형 해석 수행 가능, 선형 해석 수행 시에는 연속된 강성으로 형성하여 해석을 수행

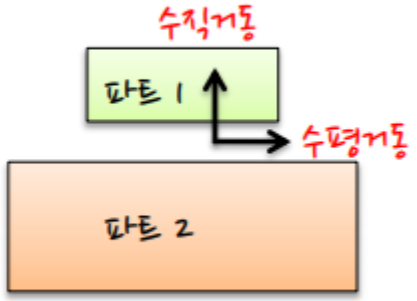






➢ **접촉의 종류**

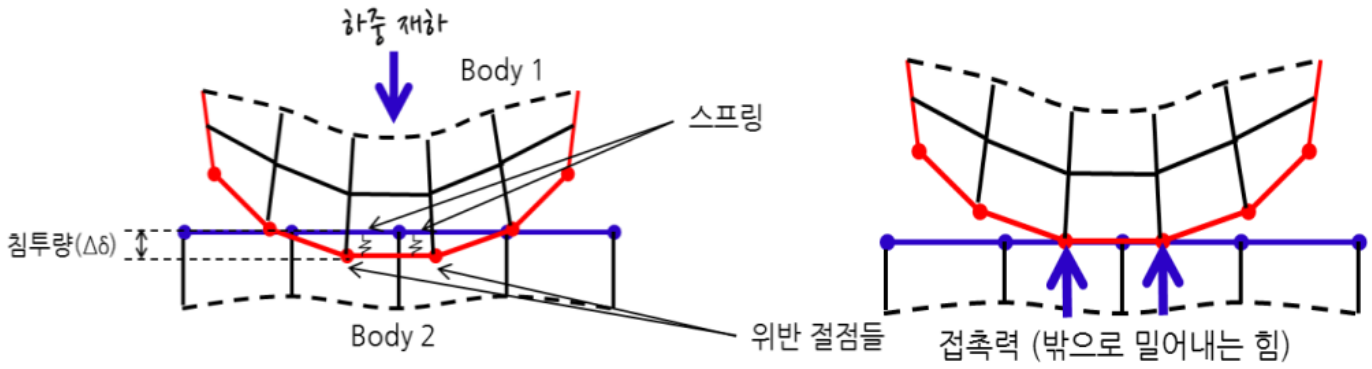




Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

벌칙 기법 (PENALTY METHOD)

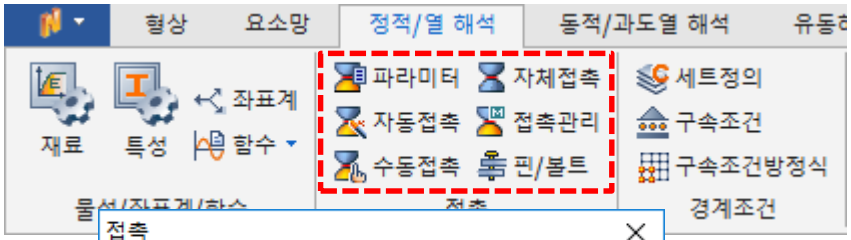
- 약간의 침투($\Delta\delta$)를 허용하고, 스프링(K) 개념을 도입하여 침투에 대한 힘(F)을 계산
- 이때 발생한 힘(F)을 접촉력(Contact force)이라고 하며, 접촉 물체를 밀어냄

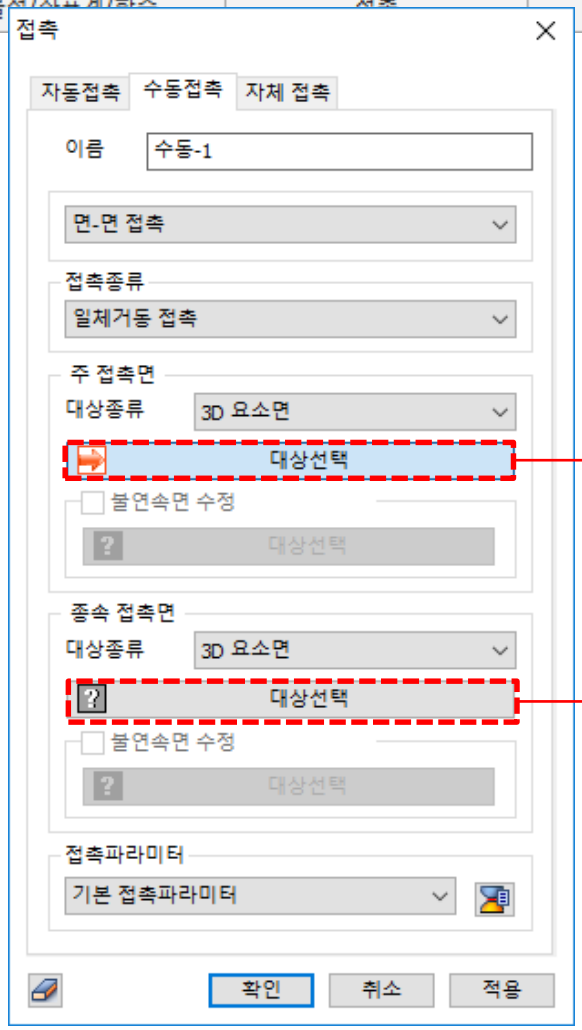


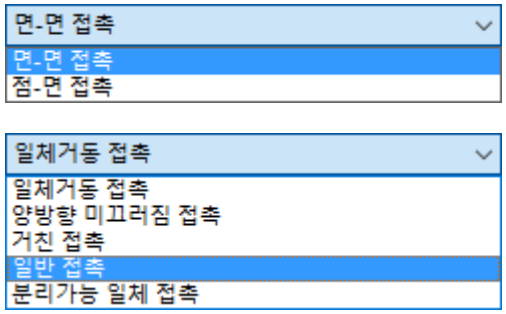
- 침투를 허용하기 때문에 정확도는 떨어지나 수치적인 처리가 간단하고 해석시간을 증가시키지 않아 복잡한 구조 해석에도 많이 사용
- 정확한 방법에는 Lagrange Multiplier 기법이 있음

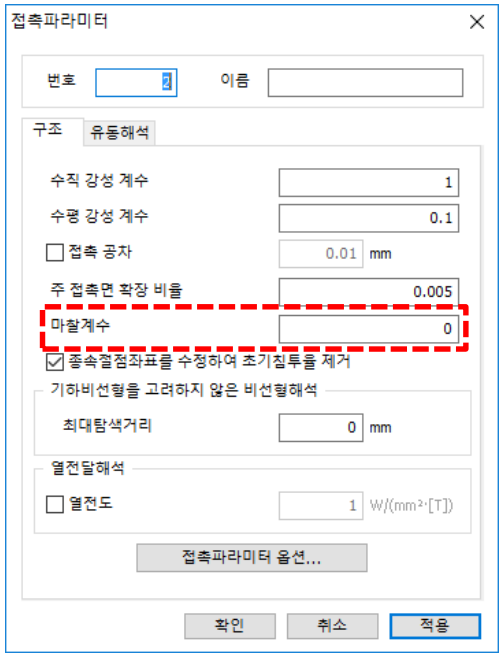
Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

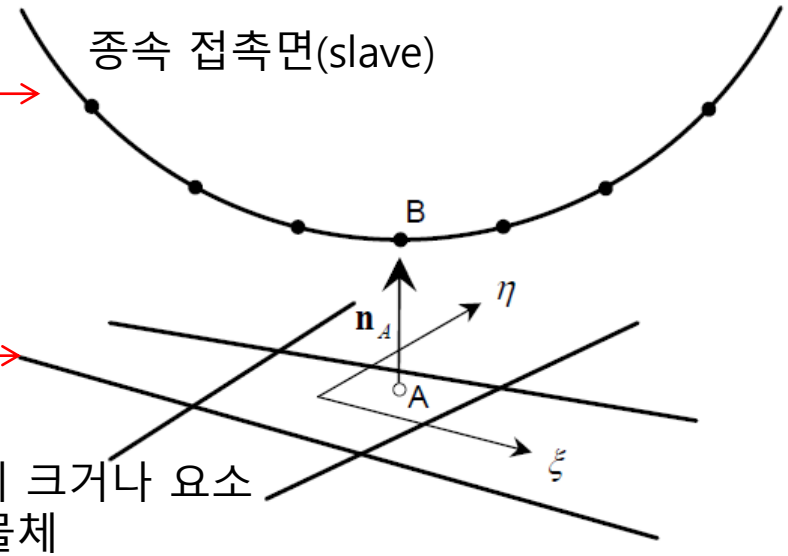
NFX의 접촉 해석











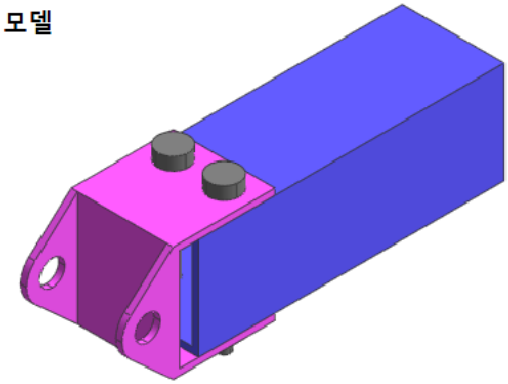
주접촉면(master)
: 상대적으로 강성이 크거나 요소가 조밀하지 않은 물체

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

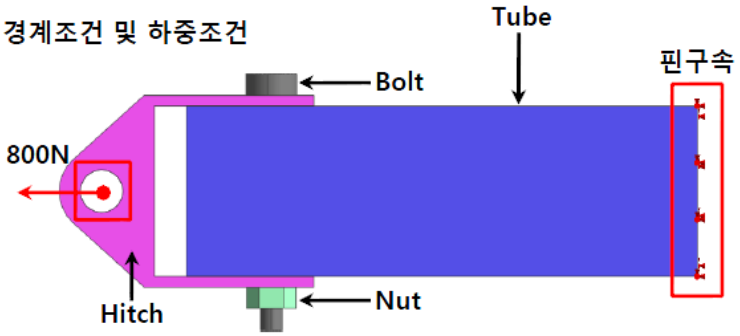
예제: HITCH ASSEMBLY

해석 개요

➢ 대상 모델

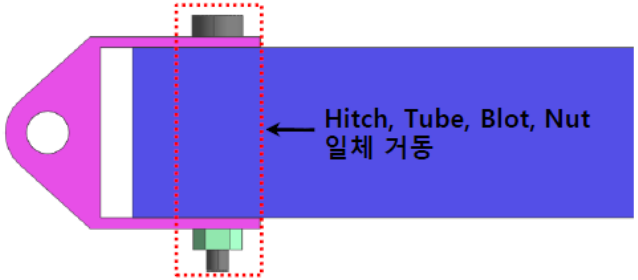


➢ 경계조건 및 하중조건

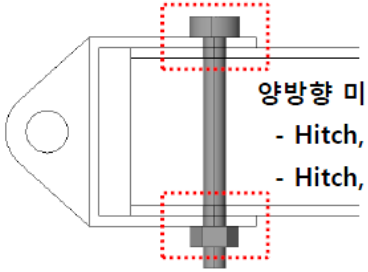


➢ 접촉조건

• 해석케이스-1 : 일체거동 접촉 (전체 파트가 하나로 일체 거동하는 조건)

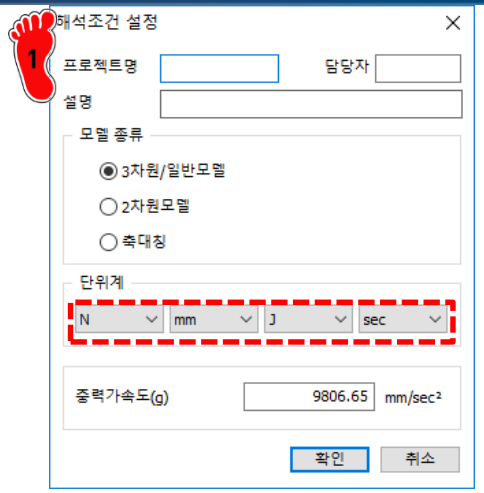


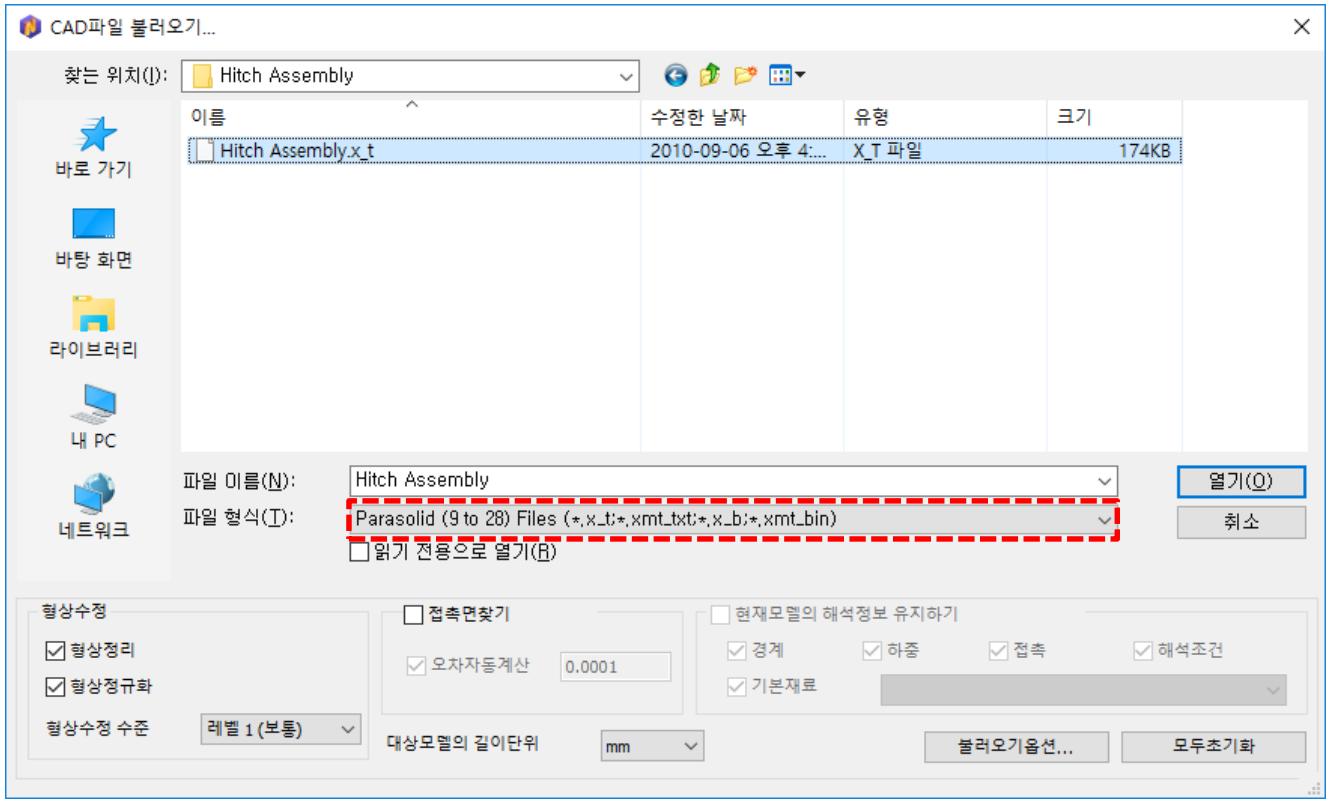
• 해석케이스-2 : 일체거동 & 양방향 미끄러짐 접촉
(Bolt와 Nut는 일체거동, 나머지 파트는 양방향 미끄러짐 접촉)



Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

기하 형상 불러오기



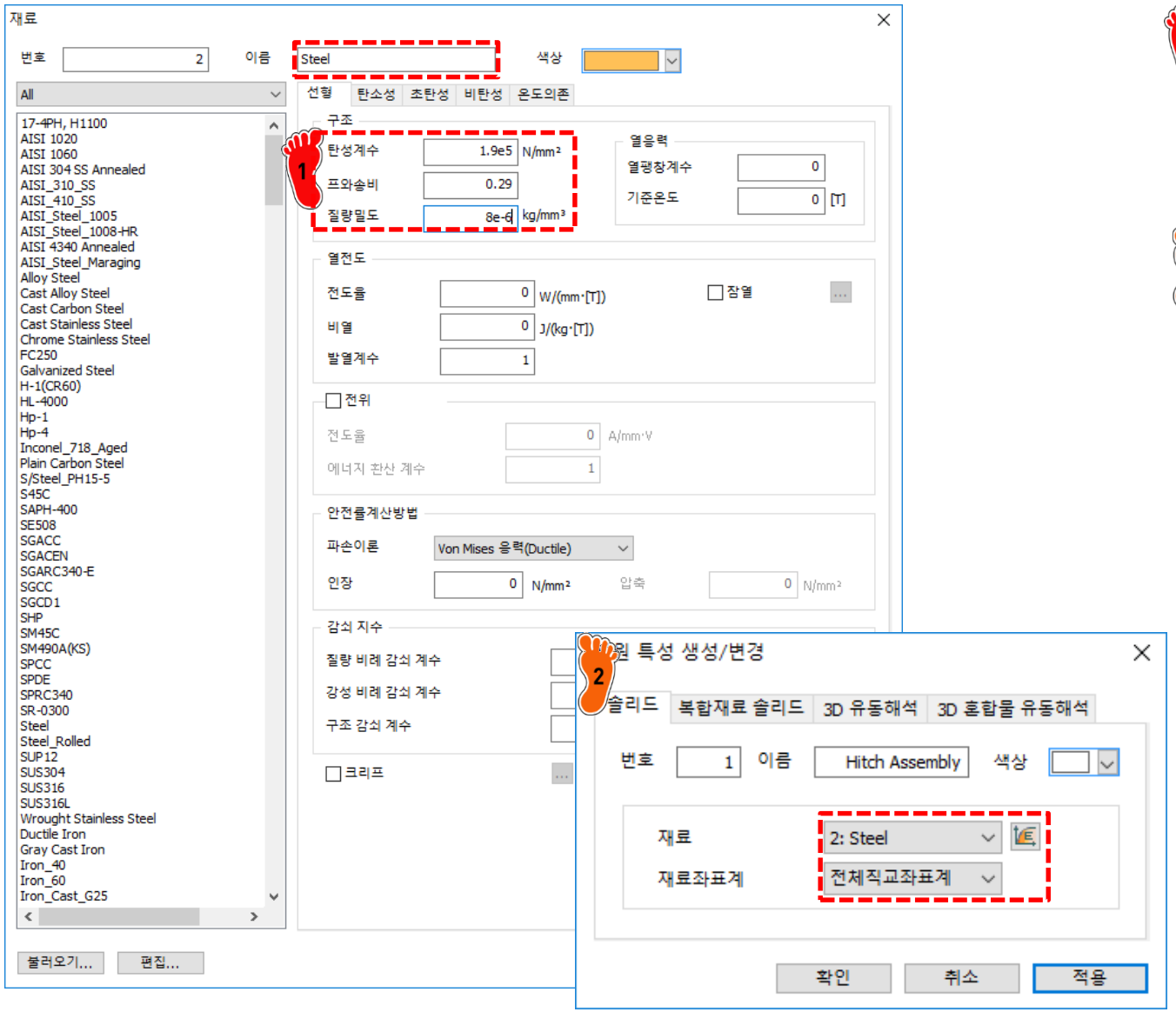


1 3차원 모델/기본 단위계로 설정

2 CAD 불러오기를 통해 Hitch_Assembly.x_t파일 불러오기

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

재료 및 특성 설정

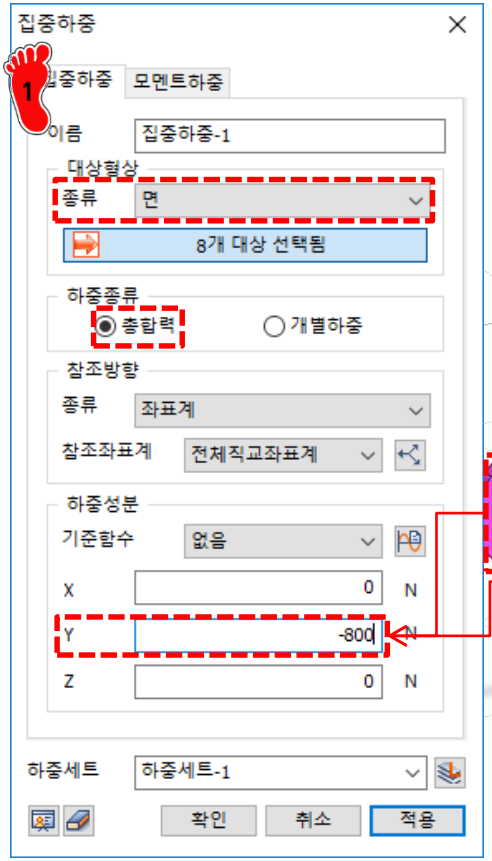


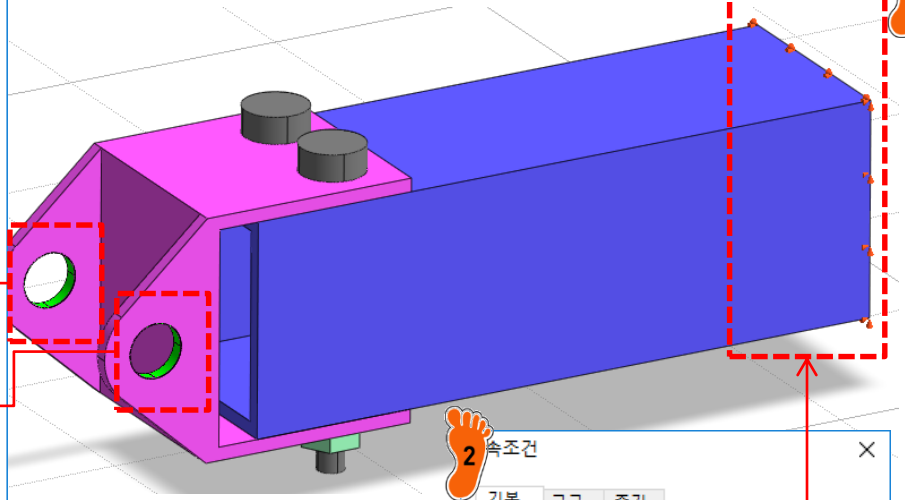
1. 'Steel'재료로 생성
탄성계수: 1.9e5 N/mm^2
프와송비: 0.29
질량밀도: 8e-6 kg/mm^3

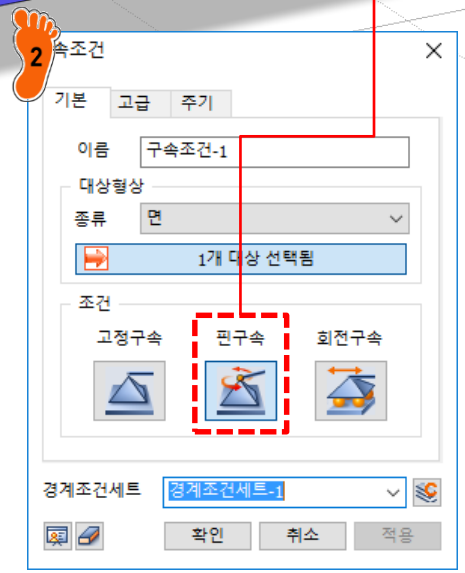
2. 생성한 'Steel' 재료로 3차원 특성 생성

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

하중 및 구속조건 설정





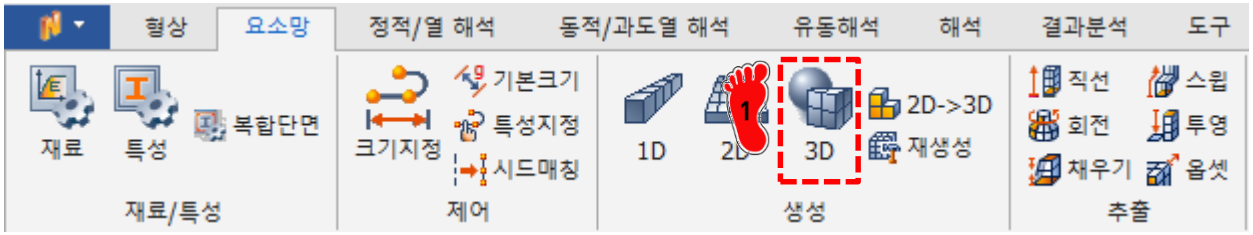


1 내부 면에 하중 적용
-하중종류: 총합력
-하중크기: -800N(Y방향)

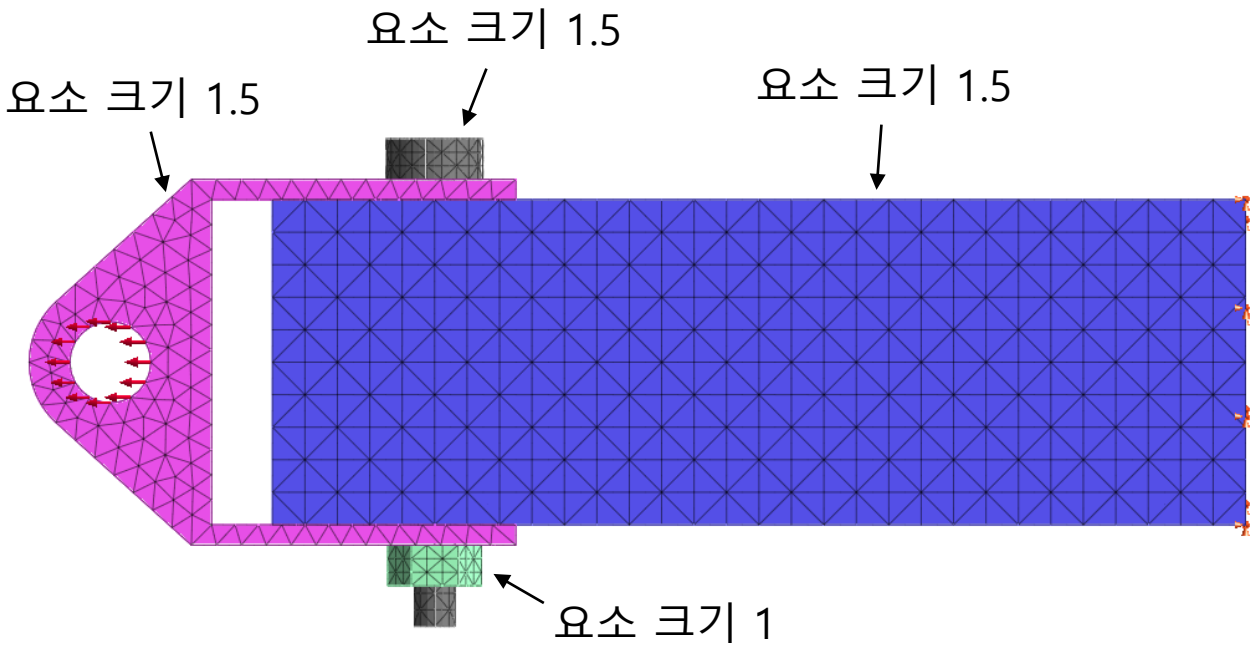
2 면에 핀구속 설정

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

요소망 설정

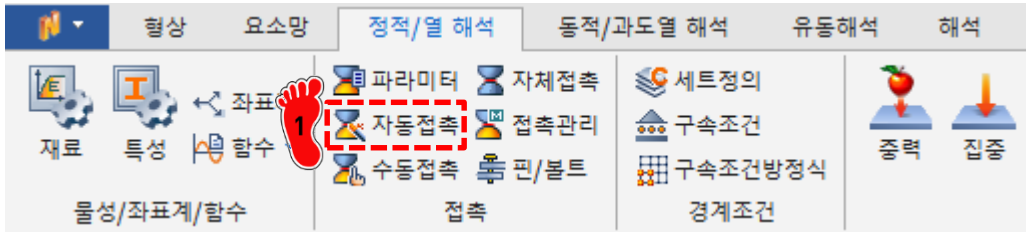


1 3D 요소망 생성 기능을 이용하여 각 파트에 요소 생성



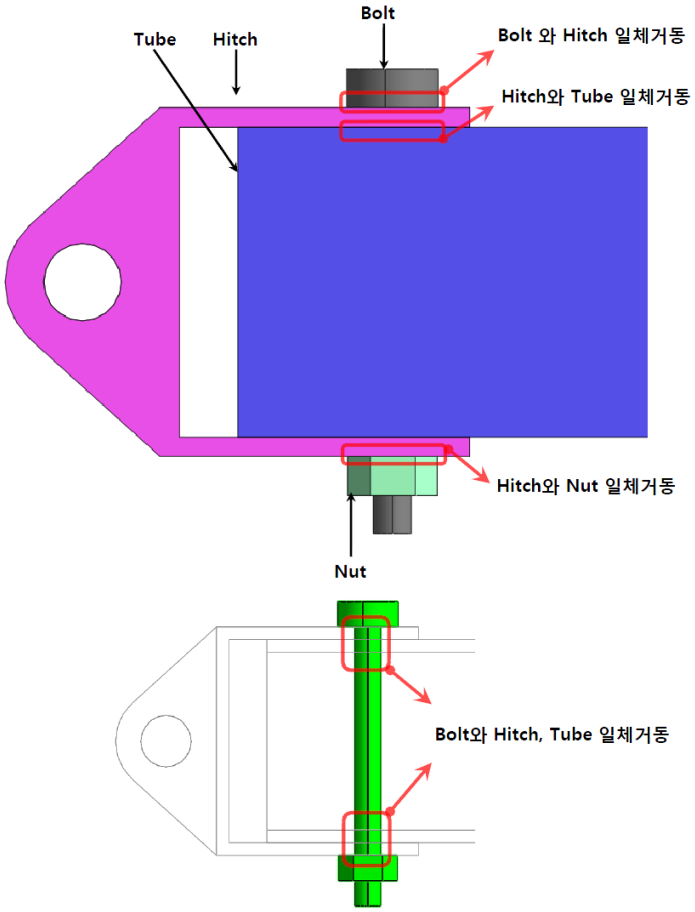
Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

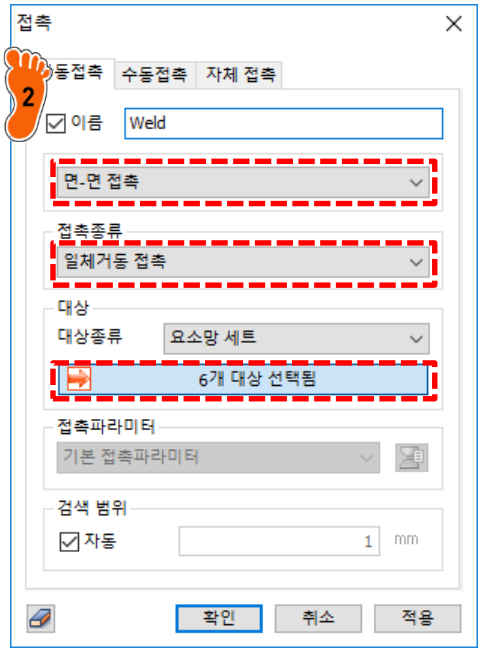
접촉 설정 [1]



1 정적/열 해석 탭의 자동접촉 선택

2 이름을 설정하고 접촉 생성
- 면-면 접촉
- 일체거동 접촉
- 모든 파트 선택

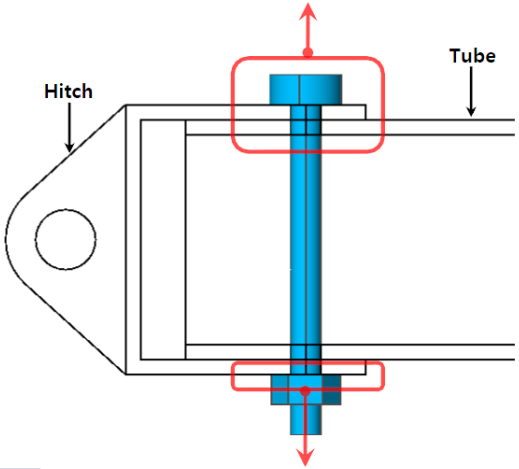




Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

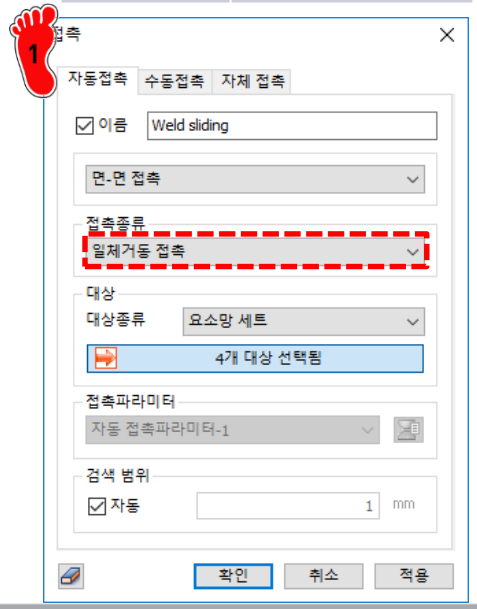
접촉 설정 [2]

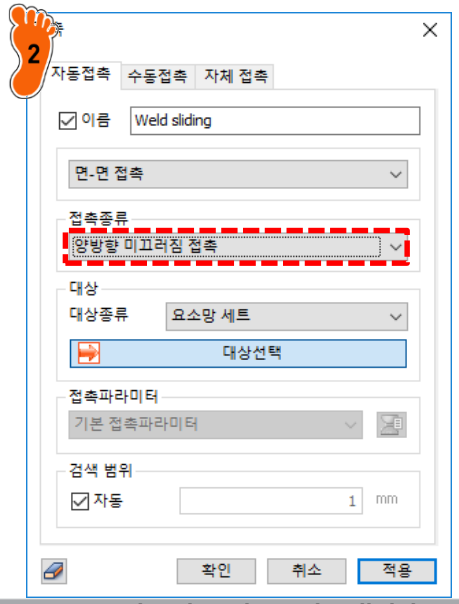
접촉 종류	양방향 미끄러짐 접촉
기하형상	Hitch, Tube, Bolt



접촉 종류	일체거동 접촉
기하형상	Bolt, Nut

접촉 종류	양방향 미끄러짐 접촉
기하형상	Hitch, Nut

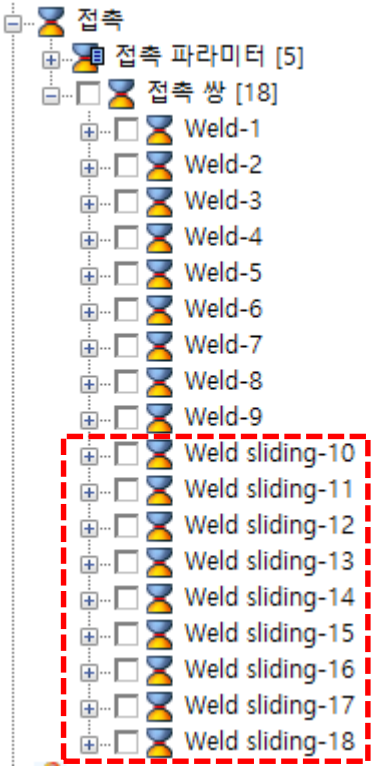




강체거동과 비교하기 위해 양방향 미끄러짐 접촉 생성

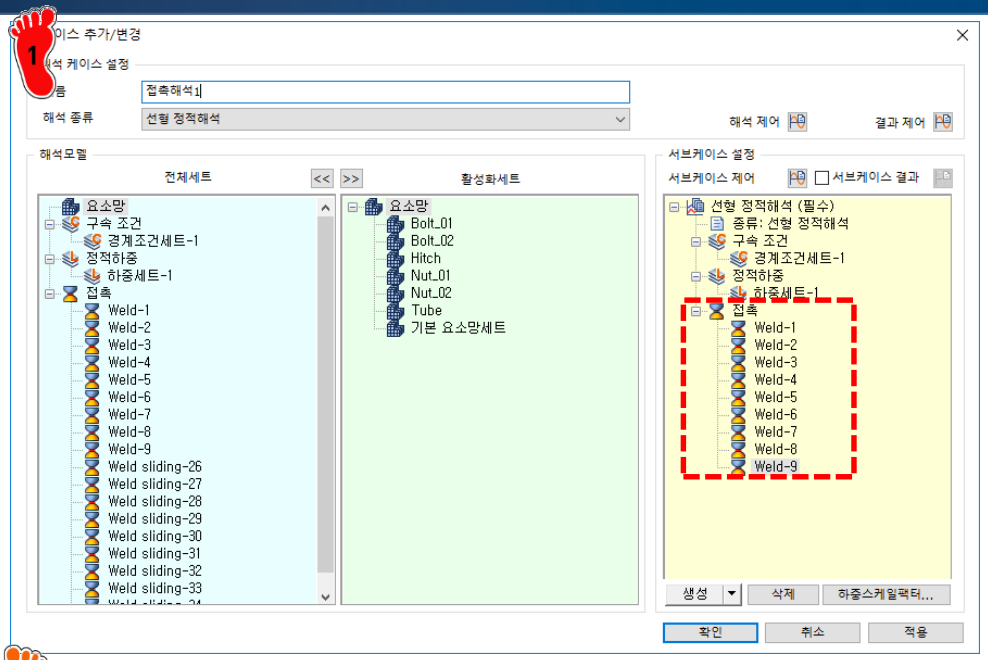
1. Bolt-Nut를 선택하여 일체거동 접촉 생성

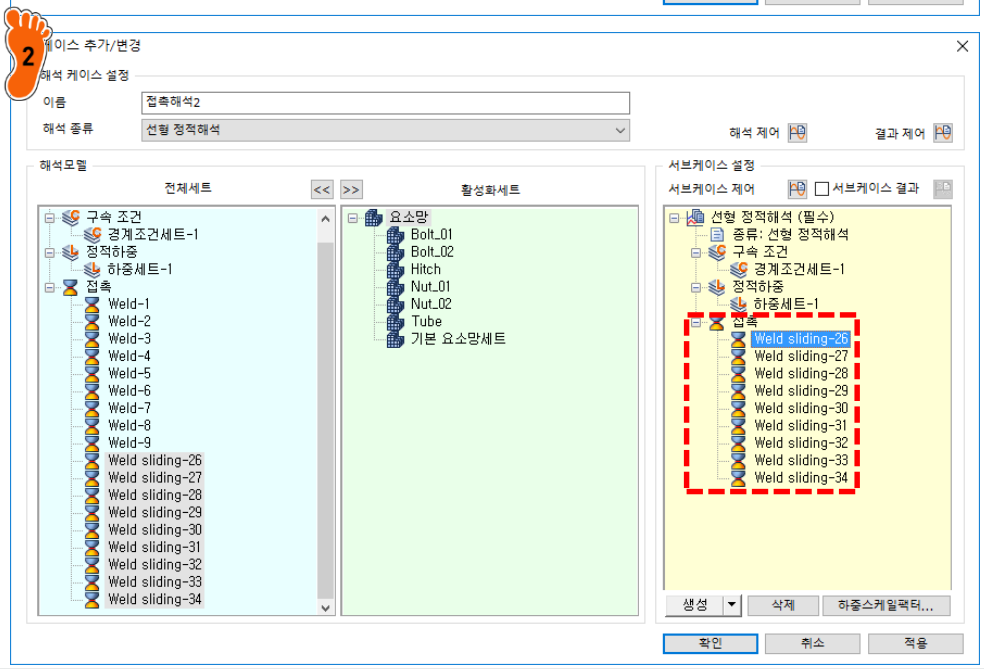
2. Hithch, Tube, Bolt 와 Hitch, Nut에 대해 양방향 미끄러짐 접촉 생성



Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

해석 케이스 정의 및 해석 실행





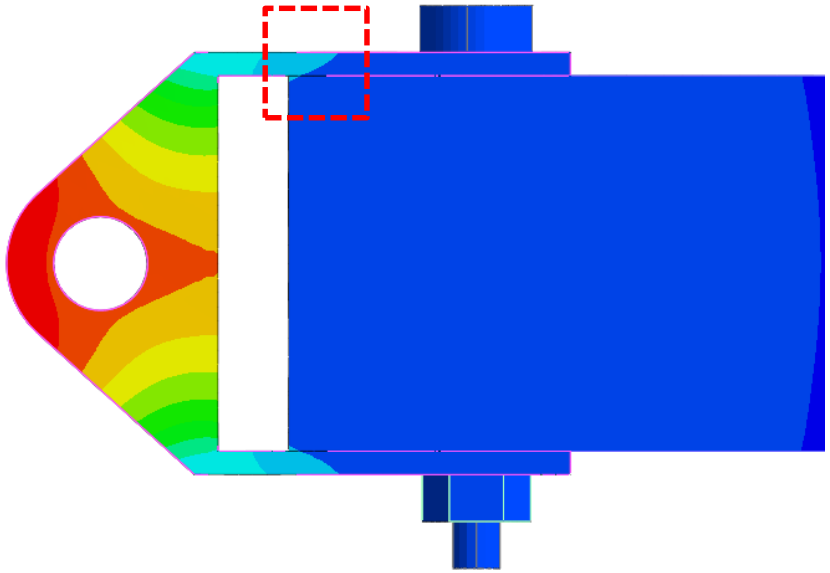
1 해석1: 강체거동 접촉만을 고려한 접촉에 대해 해석 수행

2 해석2: 양방향 미끄러짐을 포함한 접촉에 대해 해석 수행

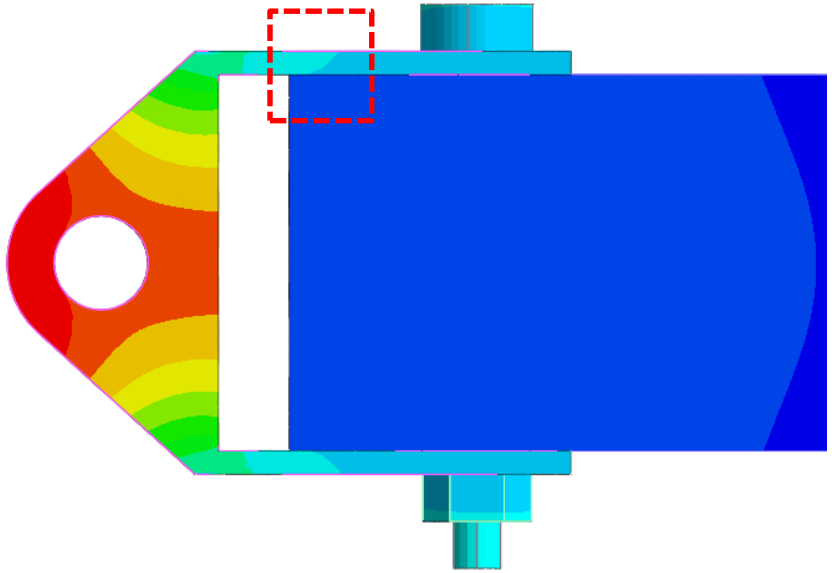
Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

해석 결과: 변위

일체 거동 접촉



양방향 미끄러짐 접촉



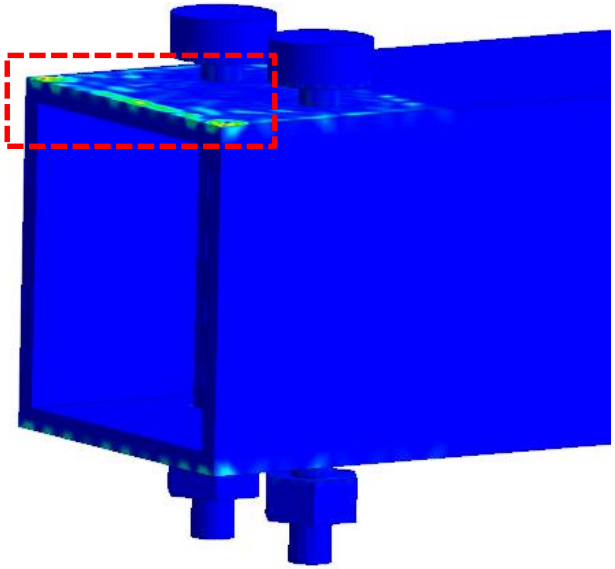
1 강체 거동 접촉의 경우 파트 간의 변위가 연속적으로 나타나남

2 양방향 미끄러짐을 고려한 경우 파트간에 변위가 불연속 하게 나타남

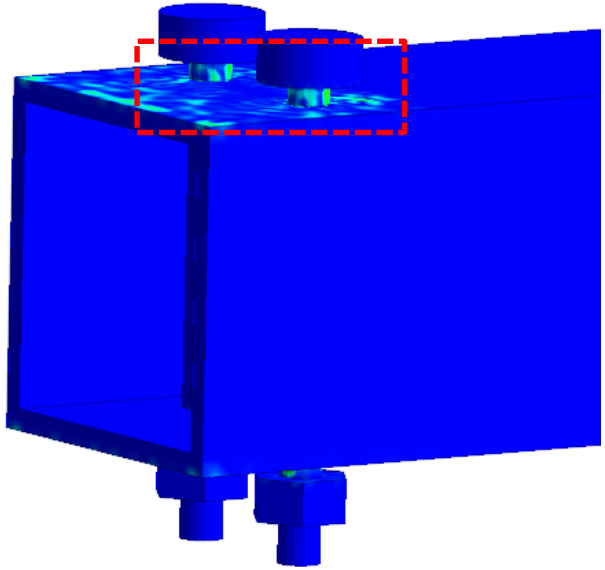
Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

해석 결과: 접촉력

강체 거동
접촉



양방향
미끄러짐
접촉



'해석 결과 추가' 에서 접촉 반력 추가

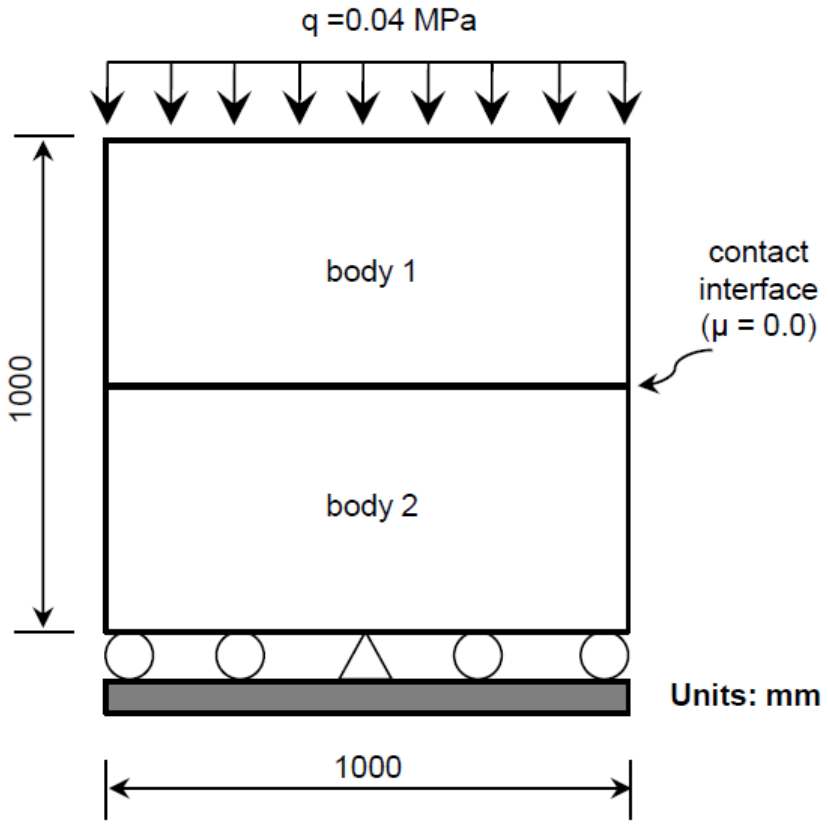
1 강체 거동 접촉의 경우 Hitch 파트와 Tube 파트가 접촉되는 부위에 접촉력이 나타남

2 양방향 미끄러짐을 고려한 경우 Hitch 파트와 Bolt 파트가 접촉되는 부위에 접촉력이 크게 나타남

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.

연습문제

다음 그림과 같이 두 개의 파트가 접촉을 할 때 요소 종류에 따른 접촉력을 계산하시오(3차원 모델로 구성). 1) 삼각형 요소, 2) 사각형 요소



Material data	Young's modulus	$E_{punch} = E_{foundation} = 100\ MPa$
	Poisson's ratio	$\nu_{punch} = \nu_{foundation} = 0.3$

Copyright © Computational Design Lab. All rights reserved.