확률과통계 7주차 과제 답안

1. 표본 X1,X2,……..,Xn ~ iid *exp*(θ) 이다. θ에 대한 최우도추정량을 구하라. (10 점)

$f(x_i;\theta) = \theta e^{-\theta x_i}, x_i \geq 0, \theta > 0$

$L(\theta) = f(x_1;\theta) \bullet f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta)$

$= \theta \bullet e^{-\theta x_1} \bullet \theta \bullet e^{-\theta x_2} \cdots \theta \bullet e^{-\theta x_n}$

$= \theta^n \bullet e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\log L(\theta) = \log(\theta^n \bullet e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}) = nlog\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\frac{dlogL(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\therefore \hat{\theta}_{MLE} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ 또는 $\frac{1}{\overline{X}}$

2. 표본 X1,X2,……..,Xn ~ iid *N*(μ ,σ2) 이다. 표본분산 S2 이 모분산 σ2 에 대한 불편추정량 임을 증명하라. (10 점)

$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ 이고, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{(n-1)}$ 이다.

$E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1$ 그러므로 $E(S^2) = \sigma^2$ 이다.